Effektiv Maple løsning af 2. ordens differentialligning (eNote 18)

Tilfældet med 2 komplekst konjugerede egenværdier

Opgave 1A, uge 13, StoreDag

A Givet den homogene differentialligning

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Find den fuldstændige løsning.

restart

Karakterligningen: $\lambda^2 + 2\cdot\lambda + 5 = 0$

$solve\left(\lambda^2 + 2\cdot\lambda + 5 = 0, \lambda\right) = -1 + 2\,\mathrm{I}, -1 - 2\,\mathrm{I}$

Dvs. 2 komplekst konjugerede rødder.

$\lambda_1 := \%[1] = -1 + 2\,\mathrm{I}$

Den fuldstændige reelle løsning

$x := unapply\left(evalc\left(c_1\cdot\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1\cdot t}\right) + c_2\cdot\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1\cdot t}\right)\right), t\right) :$

$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos(2\,t) + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin(2\,t)$

Konklusion: $x(t) = \left(c_1\cdot\cos(2\cdot t) + c_2\cdot\sin(2\cdot t)\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}$ hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Betinget reel løsning

Som opfylder: $x(0) = 1$ og $x'(0) = 2$.

$solve(\{x(0) = 1, x'(0) = 2\}) = \left\{c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{2}\right\}$

$subs(\%, x(t)) = \mathrm{e}^{-t}\cos(2\,t) + \frac{3\,\mathrm{e}^{-t}\sin(2\,t)}{2}$

Konklusion: $x(t) = \left(\cos(2\cdot t) + \frac{3}{2}\cdot\sin(2\cdot t)\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}$