Eksamensopgave 7. december 2009, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E09)

Opgave 1

```
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[4,2,\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right],\left[0,2,\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

```
> M:=<<1,0,0,1>|<0,1,1,0>|<-1,0,0,1>|<0,-1,1,0>>:
> M^(-1);
```

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

Der er givet en 4×4 matrix $\underline{\underline{A}}$ hvis egenværdiproblem er blevet løst med "Eigenvectors"i Maple-sessionen ovenfor.

1. Begrund at $\underline{\underline{A}}$ kan diagonaliseres.
2. Angiv en regulær matrix $\underline{\underline{V}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$ således at $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{V}}^{-1}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{V}}$.
3. Bestem $\underline{\underline{A}}$.
4. Bestem en 4×4 matrix $\underline{\underline{B}}$ som opfylder $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

1.1

Argumenterne kan ses på outputtet fra *Eigenvectors* anvendt på 4 x 4 matricen A.
A er kvadratisk, da den er 4 x 4.
A kan diagonaliseres, da geometrisk multiplicitet = aritmetisk multiplicitet for egenværdierne.
Nærmere bestemt gælder: $am(4) = gm(4) = 2$ og $am(0) = gm(0) = 2$.
Og summen er $2 + 2 = 4$, som er størrelsen af matricen A.

1.2

De søjler i matricen M, som er angivet i Maple ovenfor, er præcis egenvektorerne, som er vist i

Maple outputtet.

Så den matrix V, man skal anvende til diagonaliseringen er netop M fra Maple outputtet !

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

NB: A kendes ikke, derfor kan man ikke kontrollere ved at udregne $V^{-1}. A.V$.

1.3

Da egenværdierne er 4 og 0 fås diagonalmatricen Λ:

$$\Lambda := DiagonalMatrix([4, 4, 0, 0]) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda := V^{-1}.A.V \Leftrightarrow A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$$

$$A := V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dvs. matricen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.4

B er så at sige 'kvadratroden af A', idet der skal gælde, at $B^2 = A$.
Lad matricen C være en diagonalmatrix med kvadratroden af A's egenværdier i diagonalen:

$$C := DiagonalMatrix([2, 2, 0, 0]) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tjek at $C^2 = \Lambda$:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := V \cdot C \cdot V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dvs. man kan anvende matricen: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

At det virker skyldes disse omskrivninger:

$$B^2 = B \cdot B = (V \cdot C \cdot V^{-1}).(V.C.V^{-1}) = V \cdot C \cdot V^{-1}.V.C.V^{-1} = V \cdot C \cdot E \cdot C \cdot V^{-1} = V \cdot C \cdot C \cdot V^{-1}$$
$$= V \cdot C^2.V^{-1} = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} = A$$

Opgave 2

Der er givet det komplekse tal $a = 1 - i \cdot \sqrt{3}$.

1. Bestem modulus og hovedargument af a, og skriv a på formen r_v.
2. Gør rede for at a er en løsning til den binome ligning

$$(*) \qquad z^4 = 16_{\frac{2}{3}\pi}$$

3. Bestem samtlige løsninger til $(*)$, skriv hver af løsningerne på formen $a + i \cdot b$, og indtegn dem i den komplekse talplan.

$restart : with(plots) :$

2.1

$a := 1 - I \cdot \sqrt{3} :$

$|a| = 2$
eller:
$\mathrm{abs}(a) = 2$
Dvs. moduus af a er $\underline{\underline{2}}$

$\mathrm{argument}(a) = -\frac{\pi}{3}$

Dvs. hovedargumentet af a er $\underline{\underline{-\frac{\pi}{3}}}$

Skrevet på formen r_v bliver a så tallet $\underline{\underline{2_{-\frac{\pi}{3}}}}$

2.2

På eksponentiel form er a skrevet som: $a = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.
Når man så skal beregne a^4 vil den eksponentielle form give:

$$a^4 = \left(2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = 16 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot 4} = 16 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{4 \cdot \pi}{3}\right)} = 16 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{4 \cdot \pi}{3} + 2 \cdot \pi\right)} = \underline{\underline{16 \cdot e^{i \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi}}}$$

Tjek

$evalc\left(a^4 - 16 \cdot e^{I \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi}\right) = 0$

2.3

Den hurtige metode:

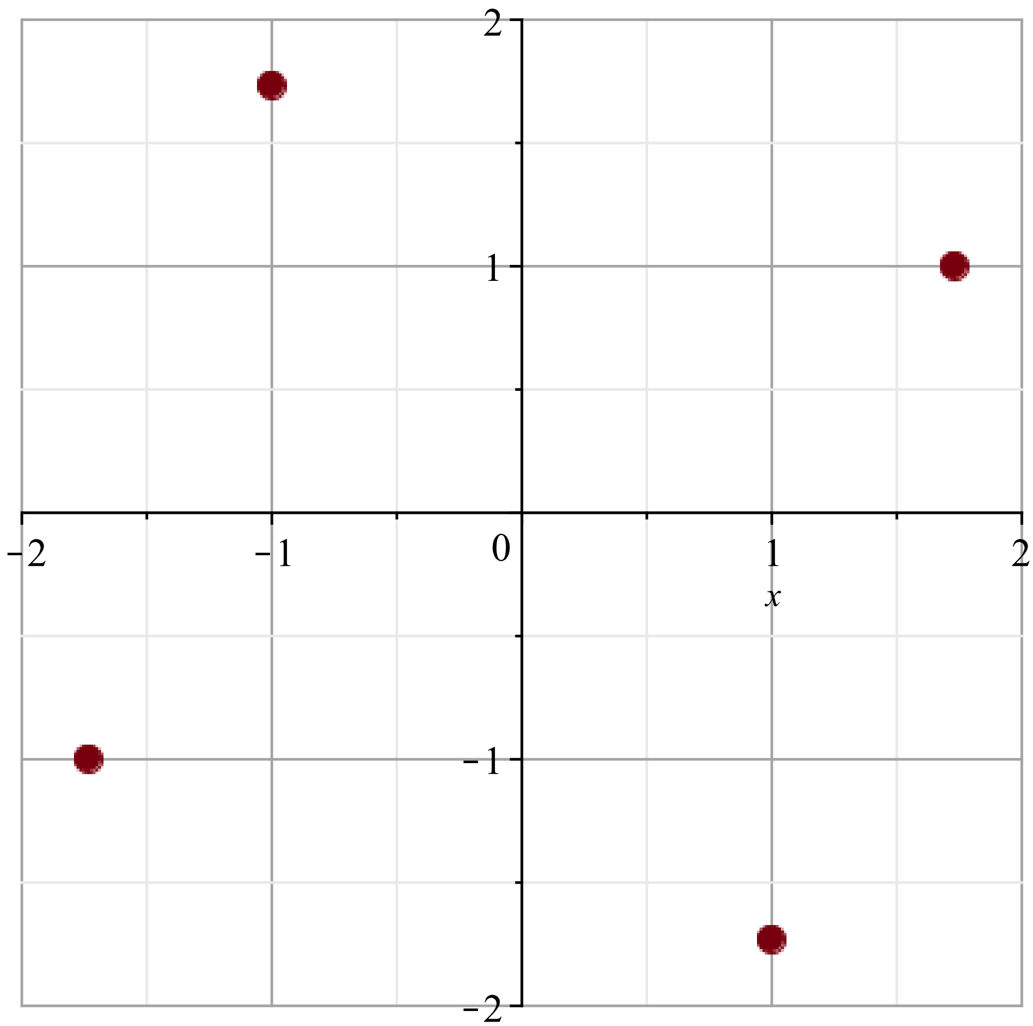
$L := solve(z^4 = a^4, z) = 1 - I\sqrt{3}, -I - \sqrt{3}, \sqrt{3} + I, -1 + I\sqrt{3}$

Metoden med enhedsrødder:
Fra spørgsmål 2.2 ved man, at a er en løsning.
Da $n = 4$ vil enhedsrødderne ligge med 90° i mellem.
Hvis man ganger med i, så drejer man det komplekse tal præcis med 90°.
De 4 løsninger kan derfor genereres sådan:

$evalc\sim([seq(a \cdot I^n, n = 0..3)]) = [1 - I\sqrt{3}, \sqrt{3} + I, -1 + I\sqrt{3}, -I - \sqrt{3}]$

De 4 løsninger er: $\underline{\underline{\pm 1 + i \cdot \sqrt{3}}}$ og $\underline{\underline{\pm(\sqrt{3} + i)}}$, hvoraf den ene, nemlig $1 - i \cdot \sqrt{3}$, er a.

$complexplot([L], x = -2..2, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, gridlines, view = [-2..2, -2..2])$



Opgave 3

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er en homogen 2. ordens lineær differentialligning givet ved

$$(*) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x(t) + a\frac{d}{dt}x(t) + a\,x(t) = 0$$

1. Diskriminanten til den til $(*)$ svarende karakterligning betegnes D. Angiv de værdier af a for hvilke $D = 0$.
2. Bestem for $a = 2$ den fuldstændige løsning til $(*)$.
3. Bestem en værdi af a for hvilken funktionen $x(t) = \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{3})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{3})t}$ er en partikulær løsning til $(*)$.

En inhomogen 2. ordens lineær differentialligning $(**)$ fremkommer ved at højresiden af $(*)$ erstattes af en kontinuert funktion $q(t) \neq 0$.

4. For et bestemt valg af a og af $q(t)$ har Maples "dsolve" som fuldstændig løsning til $(**)$ angivet $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \_C1\,t + \_C2$. Bestem det valg af a og det valg af $q(t)$ som svarer til denne løsning.

restart

3.1

Karakterligningen: $\lambda^2 + a\cdot\lambda + a = 0$

Diskriminanten $D = B^2 - 4\cdot A\cdot C = a^2 - 4\cdot 1\cdot a = a^2 - 4\cdot a = a\cdot(a-4)$

Så diskriminanten er 0, for $\underline{\underline{a = 0 \vee a = 4}}$

3.2

$solve(\lambda^2 + 2\cdot\lambda + 2 = 0, \lambda) = -1 + I, -1 - I$

Dvs. rødderne er $-1 \pm I$, som er komplekst konjugerede.

$\lambda_1 := -1 + I$:

$\alpha := \mathrm{Re}(\lambda_1) = -1$

$\beta := \mathrm{Im}(\lambda_1) = 1$

Den fuldstændige løsning er givet ved formel 18-10 i eNote 18:

$x(t) := c_1\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\beta\cdot t) + c_2\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sin(\beta\cdot t)$:

$x(t) = c_1\,e^{-t}\cos(t) + c_2\,e^{-t}\sin(t)$

Dvs. den fuldstændige løsning er $\underline{\underline{x(t) = c_1\cdot e^{-t}\cdot\cos(t) + c_2\cdot e^{-t}\cdot\sin(t)}}$, hvor $t \in \mathbb{R}$

eller:

$c_1\cdot\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1\cdot t}\right) + c_2\cdot\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1\cdot t}\right)$ assuming $t :: real = c_1\,e^{-t}\cos(t) + c_2\,e^{-t}\sin(t)$

3.3

Hvis den angivne funktion er en partikulær løsning, så kan man aflæse de 2 rødder i karakterligningen.

Rødderne må være eksponenterne, dvs. $1 \pm \sqrt{3}$.
Karakterligningen lyder så:

$$(\lambda - (1 + \sqrt{3}))\cdot(\lambda - (1 - \sqrt{3})) = 0 = (\lambda - 1 - \sqrt{3})\,(\lambda - 1 + \sqrt{3}) = 0$$

$$expand(\%) = \lambda^2 - 2\,\lambda - 2 = 0$$

Sammenlignes med den generelle karakterligning $\lambda^2 + a\cdot\lambda + a = 0$, kan man se, at $\underline{\underline{a = -2}}$

3.4

Når den fuldstændige løsning er $-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\sin(t) + c_1\cdot t + c_2$, så er den fudlstændige homogene løsning $c_1\cdot t + c_2$.

I følge sætning 18.2, formel 18-11, så må der være tale om en dobbeltrod i karakterligningen.
Da der ikke optræder nogen eksponentialfunktion i den homogene løsning, så må dobbeltroden være $\lambda = 0$.

Dvs. karakterligningen bliver blot $(\lambda - 0)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0$. Så man får, at $\underline{\underline{a = 0}}$.

Det betyder, at differentialligningen blot er $x''(t) = q(t)$, idet 2 led på venstre side er 0.

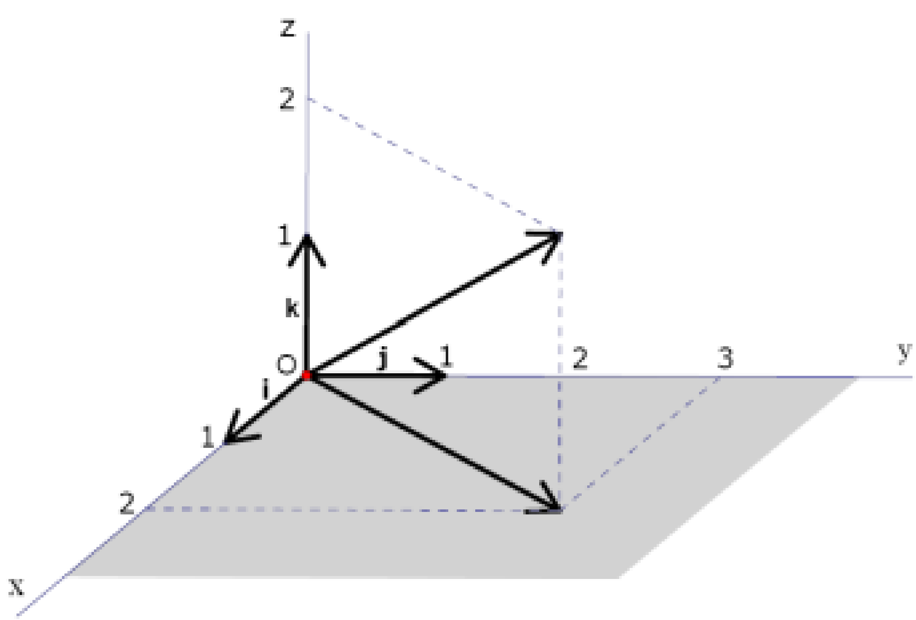
$-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\sin(t)$ fra den fuldstændige løsning kan så differentieres 2 gange, og generere $q(t)$:

$$x(t) := -\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\sin(t) :$$

$$x''(t) = e^{-t}\cos(t)$$

Konklusion: $\underline{\underline{q(t) = e^{-t}\cdot\cos(t)}}$

Opgave 4



I rummet er der givet et sædvanligt retvinklet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$-koordinatsystem, og alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. På figuren er vektoren med koordinatsættet $(2,3,2)$ projiceret vinkelret ned i (x,y)-planen i rummet. Lad f være den afbildning som projicerer alle rumvektorer vinkelret ned i (x,y)-planen.

1. Lad $\vec{v}$ være en vilkårlig rumvektor med koordinatsættet (x,y,z). Bestem koordinatsættet for $f(\vec{v})$.

2. Vis at f er lineær.

3. Vektoren $\vec{u_1}$ har koordinatsættet $(4,-3,0)$, og vektoren $\vec{u_2}$ har koordinatsættet $(0,0,7)$. Gør rede for at $\vec{u_1}$ og $\vec{u_2}$ er egenvektorer for f, og bestem de egenværdier som disse to vektorer hører til.

4. Bestem en basis for hvert af de til f hørende egenvektorrum.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

4.1

Ved lodret projektion på (x,y)-planen vil x-, og y-koordinaten bevares, og z-koordinaten blove 0. Dvs. $\underline{\underline{f(x, y, z) = (x, y, 0)}}$

4.2

f kan beskrives vha. en afbildningsmatrix eFe i sædvanlige e-basis:

$$eFe := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

Tjek at $f(x, y, z) = (x, y, 0)$:

$$eFe.\langle x, y, z\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

OK!

Når en afbildning kan beskrives ved an afbildningsmatrix, så er afbildningen lineær.

4.3

$$u_1 := \langle 4, -3, 0\rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := \langle 0, 0, 7\rangle =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$eFe \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. u_1 er egenvektor for f med egenværdien $\underline{\underline{1}}$.

$$eFe \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. u_2 er egenvektor for f med egenværdien $\underline{\underline{0}}$.

4.4

Egenrummene kan let bestemmes:

$$NullSpace(eFe - 1 \cdot IdentityMatrix(3)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ikke særligt overraskende får man, at:
Egenrummet E_1 har en basis bestående af i og j enhedsvektorerne.
Egenrummet $E_1 = span\{i, j\}$. Og E_1 har dimension 2.

$$NullSpace(eFe - 0 \cdot IdentityMatrix(3)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Egenrumemt E_0 har en basis bestående af k enhedsvektoren.
Egenrummet $E_0 = spsn\{k\}$. Og E_0 har dimension 1.