Eksamensopgave 6. december 2010, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E10)

Opgave 1

Givet to komplekse tal $a=\sqrt{3}-i$ og $b=4_{\frac{\pi}{3}}$.

1. Bestem absolutværdien og hovedargumentet af a.
2. Løs ligningen $a\cdot z=b$.
3. En kompleks ligning af formen $(z+2i)^3=c$ har a som en løsning. Bestem ligningens højreside c.
4. Find et komplekst tal d som opfylder at $e^d=b$.

restart

1.1

$a := \sqrt{3}-I:$

$|a| = 2$

eller

$\mathrm{abs}(a) = 2$

Absolutværdien (modulus) af a er $\underline{\underline{2}}$

$\mathrm{argument}(a) = -\frac{\pi}{6}$

Hovedargumentet for a er $\underline{\underline{-\frac{\pi}{6}}}$

1.2

$b := 4\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}} = 2+2\,\mathrm{I}\sqrt{3}$

$a\cdot z=b \Leftrightarrow z=\frac{b}{a}$ da $a\neq 0$

$z := evalc\left(\frac{b}{a}\right) = 2\,\mathrm{I}$

Eller:

$solve(a\cdot zz=b, zz) = -\frac{2\left(\mathrm{I}\sqrt{3}+1\right)}{\mathrm{I}-\sqrt{3}}$

$simplify(\%) = 2\,\mathrm{I}$

Løsningen er: $\underline{\underline{z=2\cdot i}}$

1.3

a er løsning til ligningen $(z+2\cdot i)^3 = c$.

$c := (a+2\cdot I)^3 = \left(\sqrt{3}+\mathrm{I}\right)^3$

$evalc(c) = 8\,\mathrm{I}$

Dvs. højresiden er $\underline{\underline{c = 8\cdot i}}$

1.4

$evalc\left(solve\left(\mathrm{e}^d = b, d\right)\right) = 2\ln(2) + \frac{\mathrm{I}\,\pi}{3}$

Dvs. et komplekst tal kan være $\underline{\underline{2\cdot\ln(2) + i\cdot\frac{\pi}{3}}}$

Der er naturligvis mange andre løsninger. Den fuldstændige løsning er

$2\cdot\ln(2) + i\cdot\left(\frac{\pi}{3} + p\cdot 2\cdot\pi\right)$ hvor $p \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2

Lad $\mathbf{A}$ betegne koefficientmatricen og $\mathbf{T}$ totalmatricen for et inhomogent lineært ligningssystem. $\mathbf{T}$ har været undersøgt med Maple således:

```
> ReducedRowEchelonForm(T);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Angiv antallet af ubekendte i ligningssystemet, og bestem rangen af $\mathbf{A}$ og rangen af $\mathbf{T}$.
2. Opskriv to forskellige løsninger til ligningssystemet.

Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning hvis afbildningsmatrix med hensyn til standardbasen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ for $\mathbb{R}^4$ er identisk med $\mathbf{A}$ (dvs. koefficientmatricen som er nævnt, men ikke vist, ovenfor).

3. Find en basis for kernen for f.
4. Gør rede for at $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3))$ er en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$ for f, og bestem koordinaterne for $f(\mathbf{e}_4)$ med hensyn til denne basis.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

2.1

I følge Maple-udskriften er $trap(T)$ en 4 x 5 matrix.

Dvs. A må være en 4 x 4 matrix.
Der er således 4 ubekendte i ligningssystemet.

$trap(A)$ må være de 4 første søjler i $trap(T)$.
$trap(A)$ har samme rang som A.
$trap(A)$ har rang 3, da der er 3 initial-ettaller.
Derfor er $\underline{\underline{rang(A) = 3}}$

$trap(T)$ har også 3 initial-ettaller, og $trap(T)$ og T har samme rang.
Derfor er også $\underline{\underline{rang(T) = 3}}$

2.2

$$trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$Rank(trapT) = 3$

Samtlige løsninger til ligningssystemet:

$$LinearSolve(trapT) = \begin{bmatrix} 3 - 4\_t_4 \\ -2 \\ 2\_t_4 \\ \_t_4 \end{bmatrix}$$

Hermed kan udvælges 2 forskellige løsninger (hvor den frie parameter sættes til 0 hhv. 1):
$\underline{\underline{(3, -2, 0, 0)}}$ og $\underline{\underline{(-1, -2, 2, 1)}}$

2.3

Udtrækker $trap(A)$ fra $trap(T)$:

$$trapA := trapT[1..4, 1..4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kernen for afbildningen f beregnes:

$$NullSpace(trapA) = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dvs. en basis for $ker(f)$ er f.eks. $\underline{\underline{(-4, 0, 2, 1)}}$

2.4

$f(e_1), f(e_2)$ og $f(e_3)$ udgør en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$, fordi de 3 initial-ettaller i matricen *trap*(T) viser at de 3 vektorer er lineært uafhængige.
Og 3 lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$danner altid en basis.

På matricen *trap*(A) kan man i 4. søjle se, at der må gælde: $f(e_4) = -4 \cdot e_1 - 2 \cdot e$
Dvs. koordinaterne til $f(e_4)$ i basen bestående af $f(e_1), f(e_2)$ og $f(e_3)$ må være $\underline{\underline{(-4, 0, 2)}}$

Opgave 3

Et system bestående af to førsteordens lineære differentialligninger med de ukendte funktioner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ har systemmatricen $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

1. Opskriv differentialligningssystemet.

Maple giver:

```
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[2, 1, \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-3, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

2. Opskriv ved hjælp af ovenstående Maple output den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

3. Antag at $x_1(t)$ og $x_2(t)$ for et givet $t_o \in \mathbb{R}$ og et givet $k \in \mathbb{R}$ opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_1(t_o) = x_2(t_o) = k$. Vis at $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i så fald er identiske.

restart

3.1

Differentilalligningssystemet består af 2 differentialligninger med 2 variable:
$x_1'(t) = 7 \cdot x_1(t) - 10 \cdot x_2(t)$ og $x_2'(t) = 5 \cdot x_1(t) - 8 \cdot x_2(t)$

3.2

Den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet er:
$x(t) := c_1 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \langle 2, 1 \rangle + c_2 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \langle 1, 1 \rangle$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2\, c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-3t} \\ c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Dvs.

$\underline{\underline{x_1(t) = 2 \cdot c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot t}}}$ og $\underline{\underline{x_2(t) = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot t}}}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Tjek

$dsolve\left(\{x_1'(t) = 7 \cdot x_1(t) - 10 \cdot x_2(t), x_2'(t) = 5 \cdot x_1(t) - 8 \cdot x_2(t)\}\right) =$

$\left\{x_1(t) = \_C1\, e^{-3t} + \_C2\, e^{2t}, x_2(t) = \_C1\, e^{-3t} + \frac{\_C2\, e^{2t}}{2}\right\}$

$x_1(t) := x(t)[1] : x_2(t) := x(t)[2] :$

$x_1(t) = 2\, c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-3t}$

$x_2(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-3t}$

3.3

$x_1(t_0) = x_2(t_0) \Leftrightarrow x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$

Differensen bliver:

$x_1(t_0) - x_2(t_0) = c_1\, e^{2t_0}$

Dette kan kun blive 0, hvis $c_1 = 0$, fordi eksponentialfunktionen altid er positiv.

Dvs. $c_1 := 0 = 0$

Hvad er så $x_1(t)$ og $x_2(t)$?

$x_1(t) = c_2\, e^{-3t}$

$x_2(t) = c_2\, e^{-3t}$

Dvs. de er så ikke blot ens i t_0, men i alle punkter. Så $x_1(t) = x_2(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Derfor er $x_1(t)$ og $x_2(t)$ identiske funktioner.

Opgave 4

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved:

$$f(x,y) = \frac{e^x}{y}.$$

1. Bestem definitionsmængden for f.

2. Udregn funktionsværdien af f i de følgende tre punkter: $A(1,1)$, $B(0,1)$ og $C(-1, \frac{1}{e})$. To ud af de tre punkter ligger på den samme niveaukurve for f. Beskriv denne niveaukurve.

3. Bestem gradienten af f i punktet $(1,1)$, og find den retningsafledede af f i den retning der er bestemt ved vektoren $\mathbf{s} = (1,-1)$.

For $u > 0$ er der i $(x,y)-$planen givet den parametriserede kurve $\mathbf{r}(u) = (u,u)$. Endvidere er der givet den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$.

4. Bestem det punkt $\mathbf{r}(u_\circ)$ i $(x,y)-$planen, for hvilket $h'(u_\circ) = 0$.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

$with(VektorAnalyse2) = [div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop]$

4.1

$f(x, y) := \frac{e^x}{y}$:

Funktionen f er defineret for alle $y \neq 0$. Dvs. $\underline{\underline{Dm(f) = \{(x, y) | y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | y = 0\}}}$

4.2

Punktet A: $f(1, 1) = e$
Punktet B: $f(0, 1) = 1$
Punktet C: $f\left(-1, \frac{1}{e}\right) = e^{-1} e$
$simplify(\%) = 1$

Så funktionsværdierne bliver $\underline{\underline{f(1, 1) = e}}$, $\underline{\underline{f(0, 1) = 1}}$ og $\underline{\underline{f\left(-1, \frac{1}{e}\right) = 1}}$.

Da $f(0, 1) = f\left(-1, \frac{1}{e}\right) = 1$, så ligger både B og C på niveaukurven givet ved $f(x, y) = 1$, altså på K_1.
Niveaukurven:

$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{y} = 1 \Leftrightarrow y = e^x$

Dvs. niveaukurven K_1 er givet ved ligningen: $\underline{\underline{y = e^x}}$

4.3

Gradienten i A:

$gradA := subs(x = 1, y = 1, grad(f(x, y), [x, y])) = \begin{bmatrix} e \\ -e \end{bmatrix}$

Dvs. gradienten er $\underline{\underline{\nabla f(1, 1) = (e, -e)}}$

Retningsafledede i A i retningen (1,-1) er skalarproduktet af gradienten og enhedsretningsvektor:
$prik(gradA, Normalize(\langle 1, -1 \rangle, 2)) = e\sqrt{2}$
Dvs. den retningsafledede er $\underline{\underline{\sqrt{2} \cdot e}}$

4.4

$r(u) := \langle u, u \rangle$:

$r(u) = \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}$

Den sammensatte funktion udregnes (parametriseringen $x = u$ og $y = u$ indsættes i f:
$h(u) := f(vop(r(u)))$:

$h(u) = \frac{e^u}{u}$

Den afledede skal være 0 i et u_0, som så kan beregnes:

$u_0 := solve(h'(u) = 0, u) = 1$

$r(u_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dvs. punktet er $\underline{\underline{r(u_0) = (1, 1)}}$