Eksamensopgave 8. december 2011, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E11)

Opgave 1

Givet matricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Et homogent lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med tre ubekendte har $\mathbf{A}$ som koefficientmatrix. Opskriv ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$, bestem trap$(\mathbf{T})$ ved hjælp af rækkeoperationer og angiv ligningssystemets løsningsmængde på standard-parameterform.

Det oplyses at matricen $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ har egenværdien 2.

2. Vis at $\mathbf{A}$ er den karakteristiske matrix (reduktionsmatricen) for $\mathbf{B}$ hørende til egenværdien 2, og find tre forskellige egenvektorer for $\mathbf{B}$ hørende til egenværdien 2.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

1.1

Koefficientmatrix A:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} :$$

Totalmatricen T:

$$T := \langle A | \langle 0, 0, 0 \rangle \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationer for at finde trappeformen af T:

$$T1 := RowOperation(T, [2, 3], 1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T2 := RowOperation(T1, [1, 3], 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T3 := RowOperation(T2, [2, 3]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. trappeformen af T er:

$$trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hermed er løsningen givet ved, idet x_3 vælges som uafhængig parameter t:
$(x_1, x_2, x_3) = (-t, -2\cdot t, t) = t\cdot(-1, -2, 1)$ hvor $t \in \mathbb{R}$

Tjek

$$LinearSolve(T) = \begin{bmatrix} -\_t_3 \\ -2\ \_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix}$$

1.2

$$B := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}:$$

Karakteristisk matrix for A svarende til egenværdien 2 er:

$$B - 2\cdot IdentityMatrix(3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dvs. det passer, at $B - 2\cdot E = A$.

Egenrummet hørende til matrix B mht. egenværdien 2 svarer til egenrummet for matrix A mht. egenværdi 0 !
Dvs. $E_{2,\,B} = E_{0,\,A}$.
Fra spørgsmål 1.1 ved man, at $E_{0,\,A} = span\{(-1, -2, 1)\}$.
3 forskellige egenvektorer kan så f.eks. være $\underline{\underline{(-1, -2, 1)}}$, $\underline{\underline{(1, 2, -1)}}$ og $\underline{\underline{(0, 0, 0)}}$

Opgave 2

1. Betragt det komplekse tal $z = -2+2i$. Bestem $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$, og indtegn tallene $z, \bar{z}$ og $\frac{1}{z}$ i den komplekse talplan.

En andenordens lineær differentialligning er givet ved

$$(*) \qquad x''(t) + a_1 \cdot x'(t) + a_0 \cdot x(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$$

hvor a_0 og a_1 er reelle tal. Det oplyses at den fuldstændige løsning til $(*)$ har formen

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\cos(2t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige reelle tal.

2. Angiv rødderne i karakterligningen for $(*)$ og bestem a_0 og a_1.

3. Find samtlige løsninger $x(t)$ til $(*)$ som opfylder de to betingelser:

$$x(0) = 0 \text{ og } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Og find samtlige løsninger $x(t)$ til $(*)$ som opfylder de to betingelser:

$$x(0) = 1 \text{ og } x(\pi) = 0\,.$$

restart : *with*(*plots*) :

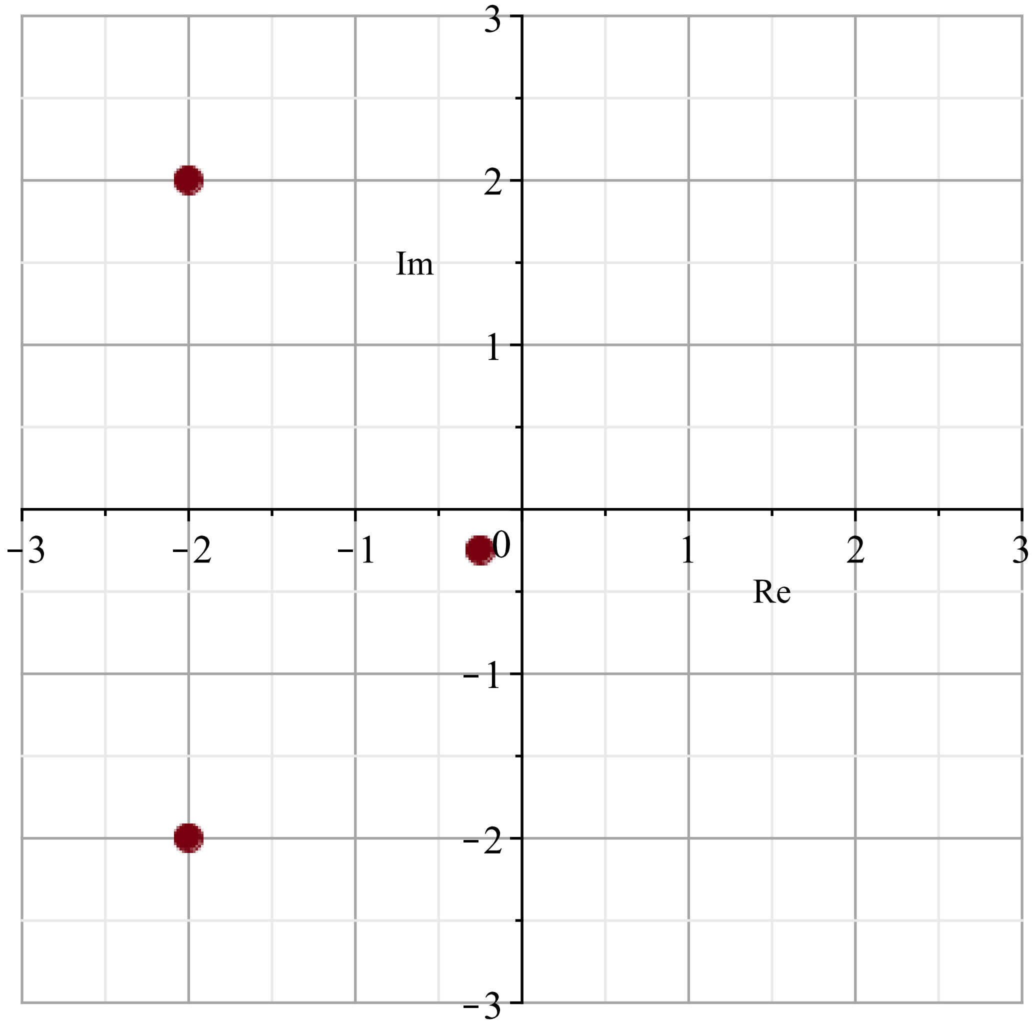
2.1

$z := -2 + 2 \cdot I$:

$\mathrm{Re}(z) = -2$

$\mathrm{Im}(z) = 2$

$complexplot\left(\left[z, \bar{z}, \frac{1}{z}\right], x = -3 ..3, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, gridlines, view = [-3 ..3, -3 ..3], labels = [\text{"Re"}, \text{"Im"}]\right)$



2.2

Da den fuldstændige løsning er givet, så kan man aflæse rødderne i karakterligningen.
Rødderne er komplekst konjugerede: $\underline{\underline{-2 \pm 2\,i}}$

Karakterligningen er så:
$(\lambda - (-2 + 2 \cdot I)) \cdot (\lambda - (-2 - 2 \cdot I)) = (\lambda + 2 - 2\,\mathrm{I})\ (\lambda + 2 + 2\,\mathrm{I})$
$expand(\%) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 8$
Hermed kan a_0 og a_1 bestemmes som koefficienterne:
$\underline{\underline{a_0 = 8}}$ og $\underline{\underline{a_1 = 4}}$

2.3

Den fuldstændige løsning er kendt:
$x(t) := c_1 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)$:
Opstiller 2 ligninger med 2 ubekendte og løser dem:
$solve\left(\left\{x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}, \{c_1, c_2\}\right) = \{c_1 = 0, c_2 = c_2\}$
Samtlige betingede løsninger er: $\underline{\underline{x(t) = c_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)}}$ hvor $c_2 \in \mathbb{R}$

$solve(\{x(0) = 1, x(\pi) = 0\}, \{c_1, c_2\})$
$solve(\{x(0) = 1\}, \{c_1, c_2\}) = \{c_1 = 1, c_2 = c_2\}$
$solve(\{x(\pi) = 0\}, \{c_1, c_2\}) = \{c_1 = 0, c_2 = c_2\}$

Men c_1 kan ikke både være 0 og 1 !
Dvs. der er INGEN betingede løsninger!

<u>eller</u>:

Differentialligningen er nu kendt:
restart
$DiffLign := x''(t) + 4\cdot x'(t) + 8\cdot x(t) = 0$:
Løser så direkte differentialligningen med betingelserne:
$dsolve\left(\left\{DiffLign, x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}\right) = x(t) = \_C1\, e^{-2\,t} \sin(2\,t)$
Samtlige betingede løsninger er: $\underline{\underline{x(t) = c_2 \cdot e^{-2\cdot t} \cdot \sin(2\cdot t)}}$ hvor $c_2 \in \mathbb{R}$

$dsolve(\{DiffLign, x(0) = 1, x(\pi) = 0\})$
Inter svar fra Maple, dvs. der er INGEN betingede løsninger!

Opgave 3

Om matricen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ oplyses at $\operatorname{trap}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En lineær afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ af vektorrummet af polynomier af højst anden grad ind i vektorrummet af polynomier af højst første grad er givet ved at der for ethvert $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ gælder

$$f(P(x)) = (2-x)\cdot\left(P(1) - 2\cdot P''(x)\right).$$

Der er endvidere givet polynomierne

$$Q_1(x) = 1 + x + x^2 \text{ og } Q_2(x) = -2 + x.$$

1. Vis at $f(Q_1(x)) = Q_2(x)$.
2. Bestem $f(1)$, $f(x)$ og $f(x^2)$, og opstil afbildningsmatricen for f med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$ og monomiebasen i $P_1(\mathbb{R})$.
3. Bestem samtlige løsninger $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ til ligningen

$$f(P(x)) = Q_2(x).$$

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

$f := (2-x)\cdot(P(1) - 2\cdot P''(x))$:
$P(x) := 1 + x + x^2$:
$f = -2 + x$
Hermed bevist, at $\underline{\underline{f(Q_1(x)) = Q_2(x)}}$

3.2

$P(x) := 1$:
$f = 2 - x$
I monomiebasen er dette $2\cdot 1 + (-1)\cdot x$
$P(x) := x$:
$f = 2 - x$

I monomiebasen er dette $2 \cdot 1 + (-1) \cdot x$

$P(x) := x^2$:

$f = -6 + 3x$

I monomiebasen er dette $(-6) \cdot 1 + 3 \cdot x$

Afbildningsmatricen er så: $mFm := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$:

3.3

$Q_2(x)$ er i monomiebasen blot $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Det ligningssystem, som skal løses har da totalmatricen T identisk med matrix A, som er angivet i opgaveteksten!

$$T := \langle mFm | \langle -2, 1 \rangle \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Trappeformen af T er også angivet i opgaveteksten: $trapT := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

Hermed kan den fuldstændige løsning til ligningssystemet opskrives:
$(-1, 0, 0) + (-s + 3 \cdot t, s, t) = (-1 - s + 3 \cdot t, s, t)$

Fuldstændig løsning indenfor polynomierne i $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ er: $\underline{\underline{(-1 - s + 3 \cdot t) + s \cdot x + t \cdot x^2}}$ hvor $s, t \in \mathbb{R}$

Der er altså 2 frie parametre.

eller:

$$LinearSolve(T) = \begin{bmatrix} -1 - \_t_2 + 3\,\_t_3 \\ \_t_2 \\ \_t_3 \end{bmatrix}$$

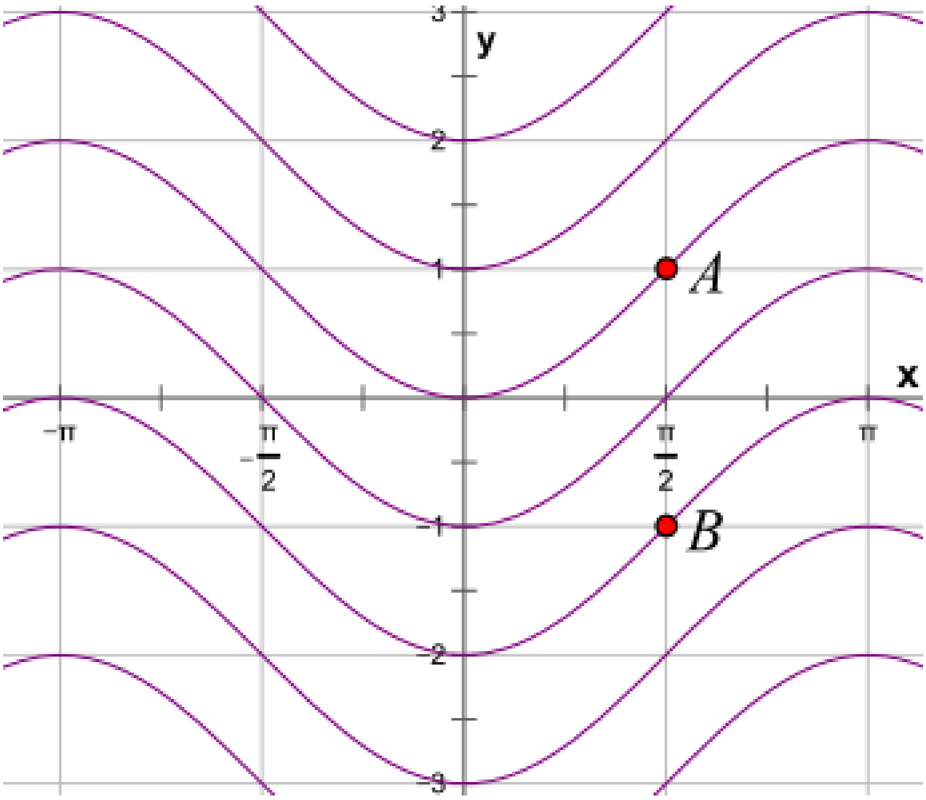
Det giver naturligvis samme løsning!

Opgave 4

Givet funktionen

$$f(x,y) = (\cos(x) + y)^2 \text{ hvor } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

På figuren nedenfor vises et udsnit af niveaukurver for f. Endvidere er der indtegnet punkterne $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ og $B = \left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.



1. Gør rede for at både A og B ligger på niveaukurven K_1, og bestem gradienten af f i de to punkter.

En kurve i (x,y)-planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = (u, 1-\cos(u))\ ,\ u \in \mathbb{R}.$$

2. Bestem et tal u_0 der opfylder at $\mathbf{r}(u_0) = A$, og vis at $\mathbf{r}(u)$ er en del af K_1.

3. Opskriv en parameterfremstilling for den del af K_1 som går gennem B.

restart
with(*VektorAnalyse2*) = [*div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop*]

4.1

$f(x,y) := (\cos(x)+y)^2:$

Punktet A: $f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1$

Punktet B: $f\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = 1$

Derfor vil både A og B ligge på niveaukurven K_1, dvs. $f(x,y) = 1$.

Gradienten:

$G := unapply(grad(f(x,y), [x,y]), [x,y]):$

$$G(x,y) = \begin{bmatrix} -2\,(\cos(x)+y)\sin(x) \\ 2\cos(x)+2y \end{bmatrix}$$

Punktet A: $G\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Punktet B:

$$G\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dvs. gradienterne er: $\underline{\underline{\nabla f(A) = (-2, 2)}}$ og $\underline{\underline{\nabla f(B) = (2, -2)}}$

4.2

$r(u) := \langle u, 1 - \cos(u) \rangle :$

$$r(u) = \begin{bmatrix} u \\ 1 - \cos(u) \end{bmatrix}$$

$$solve\left(\left\{r(u)[1] = \frac{\pi}{2}, r(u)[2] = 1\right\}\right) = \left\{u = \frac{\pi}{2}\right\}$$

Dvs. $\underline{\underline{u_0 = \frac{\pi}{2}}}$

$$\text{Tjek: } r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f(vop(r(u))) = 1$

Dvs. $r(u)$ er en del af niveaukurven K_1.

4.3

Parameterfremstilling for den del af K_1, der går gennem B?

Inspireret af $r(u)$ i spørgsmål 4.2 foreslås:

$r_B(u) := \langle u, -1 - \cos(u) \rangle :$

$$r_B(u) = \begin{bmatrix} u \\ -1 - \cos(u) \end{bmatrix}$$

Bevis for at den går gennem B:

$$f\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = 1$$

Bevis for at parameeterfremstillingen giver punkter, som alle ligger på K_1:

$f(vop(r_B(u))) = 1$

Konklusion: som parameterfremstilling kan anvendes: $r_B(u) = \begin{bmatrix} u \\ -1 - \cos(u) \end{bmatrix}$, hvor $u \in \mathbb{R}$

NB: Der er ikke så mange andre muligheder. Der skal nemlig gælde:

$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow (\cos(x) + y)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos(x) + y = \pm 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 + \cos(x)$

"plus" anvendes ved A, "minus" ved B !