Eksamensopgave 10. december 2012, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E12)

Opgave 1

Et reelt lineært ligningssystem er givet ved:

$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

1. Opstil ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og bestem trap$(\mathbf{T})$.
2. Opskriv tre forskellige løsninger til systemet.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3\,, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

3. Angiv en basis for kernen for f.
4. Bestem dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

1.1

Der er tale om et homogent ligningssystem:

Koefficientmatricen A er:

$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$:

Højre siden b er:

$b := \langle 0, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Totalmatricen T er:

$T := \langle A | b \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Trappeformen af T er:

$ReducedRowEchelonForm(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.2

Samtlige løsninger til det homogene ligningssystem er:

$NullSpace(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

eller

$LinearSolve(T) =$

$$\begin{bmatrix} -\_t_3 \\ -\_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix}$$

Så samtlige løsninger er $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Så 3 forskellige løsninger kan f.eks. være: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.3

Kernen for dem givne lineære afbildning er præcis den fuldstændige løsning til det givne homogene ligningssystem!
Den er fundet i spørgsmål 1.2.

Konklusion: $ker(f) = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hvor $t \in \mathbb{R}$

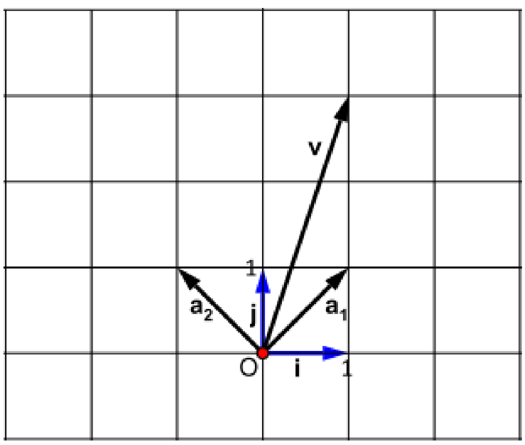
1.4

Den lineære afbildning f går fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^2$.
Dimensionssætningen siger, at $dim(f(\mathbb{R}^3)) + dim(kef(f)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Da $dim(ker(f)) = 1$ i følge spørgsmål 1.3,
så er dimensionen af billedrummet: $dim(f(\mathbb{R}^3)) = 3 - 1 = 2$

Dvs. billedrummet er faktisk hele $\mathbb{R}^2$!

Opgave 2

I planen er der givet et sædvanligt retvinklet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, hvor alle vektorer tænkes afsat ud fra origo. Den tilhørende standardbasis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes med e. En ny basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ og en vektor $\mathbf{v}$ er indtegnet i koordinatsystemet som vist på figuren.



Om en lineær afbildning f, som afbilder mængden af plane vektorer ind i mængden af plane vektorer, oplyses at $f(\mathbf{i}) = \mathbf{a}_1$ og $f(\mathbf{j}) = \mathbf{a}_2$.

1. Gør rede for at afbildningsmatricen for f med hensyn til basis e er givet ved:
$$_e\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Bestem koordinatvektoren for billedvektoren $f(\mathbf{v})$ med hensyn til basen e.
3. Bestem en vektor $\mathbf{u}$ som opfylder $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
4. Lad $_a\mathbf{F}_a$ betegne afbildningsmatricen for f med hensyn til basis a. Bestem $_a\mathbf{F}_a$.
5. Bestem koordinatvektoren for billedvektoren $f(\mathbf{v})$ med hensyn til basen a.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

2.1

På figuren aflæses direkte i e-basis, at $f(i) = a_1 = (1, 1)$ og $f(j) = a_2 = (-1, 1)$.

På vektorform er $a_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} :$

Derfor er afbildningsmatricen eFe givet ved.

$$eFe := \langle a_1 | a_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hermed redegjort for at $eFe = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2

Aflæser direkte i e-basis, at $ev := \langle 1, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Billedet af denne vektor ved f er så: $eFe \cdot ev = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2.3

En vektor u skal opfylde, at $f(u)0 = v$.
Til det formål bestemmes den fuldstændige løsning:

$$LinearSolve(eFe, ev) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. den eneste vektor, som opfylder kravet er: $\underline{\underline{u = (2, 1)}}$

2.4

Basisskiftematricen eMa er:

$$eMa := \langle a_1 | a_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$aMe := eMa^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Afbildningsmatricen aFa kan så beregnes:

$$aFa := aMe \cdot eFe \cdot eMa = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. afbildningsmatricen $aFa = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

NB: aFa er identisk med eFe !

2.5

Billedet af v i a-basis:

$$av := aFa \cdot aMe \cdot ev = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

eller:

$$av := aMe \cdot eFe \cdot ev = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dvs. billedet af v i a-basis er: $\underline{\underline{f(v) = (1, 3)}}$

Opgave 3

En 1. ordens inhomogen lineær differentialligning er for $t \in \mathbb{R}$ givet ved

$$(*) \qquad x'(t) + a \cdot x(t) = q(t)$$

hvor a er et reelt tal og $q(t)$ en given reel, kontinuert funktion. Betragt funktionerne:

$$x_1(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + 2e^{-2t} \quad \text{og} \quad x_2(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + e^{-2t}\,.$$

1. Vis at hvis der i $(*)$ gælder at $a = 2$ og $q(t) = e^{3t}$, så er $x_1(t)$ og $x_2(t)$ løsninger til $(*)$, mens differensen $x_1(t) - x_2(t)$ er en løsning til den til $(*)$ svarende homogene lineære differentialligning.

Betragt funktionerne:

$$x_3(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{og} \quad x_4(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}\,.$$

2. Bestem det tal a og den funktion $q(t)$ i $(*)$ som opfylder at $x_3(t)$ og $x_4(t)$ er løsninger til $(*)$.

restart

3.1

Definerer differentialligningens venstre side som en funktion af:

$f := X \rightarrow diff(X, t) + 2 \cdot X:$

$f(x(t)) = \frac{d}{dt} x(t) + 2\, x(t)$

Indsætter de 2givne funktioner som "expressions" (NB: virker ikke som "funktioner"):

$x_1 := \frac{1}{5} \cdot e^{3 \cdot t} + 2 \cdot e^{-2 \cdot t} : x_2 := \frac{1}{5} \cdot e^{3 \cdot t} + e^{-2 \cdot t} :$

Indsætter i differentialligningen:

$f(x_1) = e^{3\,t}$

$f(x_2) = e^{3\,t}$

$f(x_1 - x_2) = 0$

Konklusion: x_1 og x_2 er løsninger til den inhomogene differentialligning, og $x_1 - x_2$ er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

NB: at differensen mellem 2 inhomogene løsninger er ALTID en homogen løsning.

3.2

Definerer differentialligningens venstre side som en funktion af:

$f := X \rightarrow diff(X, t) + a \cdot X:$

$f(x(t)) = \frac{d}{dt} x(t) + a\, x(t)$

Definerer de 2 funktioner som "expressions":

$x_3 := \frac{1}{2} \cdot e^{t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} : x_4 := \frac{1}{2} \cdot e^{t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} :$

I følge sætning 16.9 er løsningen for den homogene differentialligning giver ved:

$x(t) = c \cdot e^{-P(t)} = c \cdot e^{-\int a\, dt} = c \cdot e^{-a \cdot t}$

Differencen mellem x_3 og x_4 er en løsning til den tilsvarende homogene differentialligning:

$x_3 - x_4 = -e^{-t}$

En sammenligning af eksponenterne giver, at konstanten er: $\underline{\underline{a = 1}}$

Indsætter i differentialligningen, og får følgende højreside:

$subs(a = 1, f(x_3)) = e^{t}$

$subs(a = 1, f(x_4)) = e^{t}$

Hermed bevist, at højresiden er: $\underline{\underline{q(t) = e^{t}}}$

Tjek

Differentialligningen lyder så: $x'(t) + x(t) = e^{t}$

$restart : dsolve(x'(t) + x(t) = e^{t}) = x(t) = \frac{e^{t}}{2} + e^{-t}\, \_C1$

x_1 fås med $\_C1 = -\frac{1}{2}$, og x_2 fås med $\_C1 = \frac{1}{2}$.

Opgave 4

Et differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1{}'(t) &= \quad 2\cdot x_2(t) \\ x_2{}'(t) &= -2\cdot x_1(t) \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

1. Gør rede for at differentialligningssystemet har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Opstil det karakteristiske polynomium for **A** og bestem de to komplekse egenværdier for **A**.
3. Bestem en egentlig egenvektor for hver af de to egenværdier for **A**.
4. Opskriv ved hjælp af de i spørgsmål 2 og 3 fundne egenværdier og egenvektorer for **A** den fuldstændige komplekse løsningsmængde til det givne differentialligningssystem.
5. Bestem den løsning til differentialligningssystemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 2$.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

4.1

Differentialligningssystemet kan opskrives på matrixform:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Derfor er systemmatricen $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} :$

4.2

Karakteristisk matrix:

$M(\lambda) := A - \lambda \cdot IdentityMatrix(2) :$

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomium for A:

$p(\lambda) := Determinant(A - \lambda \cdot IdentityMatrix(2)) :$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$

Dvs. det karakteristiske polynomium er

$$\underline{\underline{\lambda^2 + 4}}$$

Egenværdier:
$solve(p(\lambda) = 0, \lambda) = 2\,\mathrm{I}, -2\,\mathrm{I}$
Dvs. egenværdierne (komplekst konjugerede) er: $\underline{\underline{\pm 2 \cdot i}}$

Tjek
$Eigenvalues(A, output = list) = [2\,\mathrm{I}, -2\,\mathrm{I}]$

4.3
Egenvektorer:

$$NullSpace(M(2 \cdot I)) = \left\{ \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Så en egenvektor svarende til egenværdien $2 \cdot i$ er f.eks. $\underline{\underline{(-i, 1)}}$

$$NullSpace(M(-2 \cdot I)) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Så en egenvektor svarende til egenværdien $2 - \cdot i$ er f.eks. $\underline{\underline{(i, 1)}}$

Tjek

$$Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[2\,\mathrm{I}, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[-2\,\mathrm{I}, 1, \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

4.4
$\lambda := 2 \cdot I :$
$v := \langle -I, 1 \rangle :$
Idet egenværdier og egenvektorer er komplekst konjugerede gælder der:
$x_{\mathbb{C}}(t) := c_1 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v + c_2 \cdot e^{\overline{\lambda} \cdot t} \cdot \overline{v} :$
Den fuldstændige komplekse løsning $x_{\mathbb{C}}(t)$ til differentialligningssystemet er:

$$x_{\mathbb{C}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathrm{I}\, c_1\, e^{2\,\mathrm{I}\,t} + \mathrm{I}\, c_2\, e^{-2\,\mathrm{I}\,t} \\ c_1\, e^{2\,\mathrm{I}\,t} + c_2\, e^{-2\,\mathrm{I}\,t} \end{bmatrix}$$

4.5
Betinget reel løsning (ud fra fuldstændig kompleks løsning)!
$C := solve(\{x_{\mathbb{C}}(0)[1] = 0, x_{\mathbb{C}}(0)[2] = 2\}, \{c_1, c_2\}) = \{c_1 = 1, c_2 = 1\}$
$c_1 := rhs(C[1]) = 1$
$c_2 := rhs(C[2]) = 1$

$$x_{\mathbb{C}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathrm{I}\, e^{2\,\mathrm{I}\,t} + \mathrm{I}\, e^{-2\,\mathrm{I}\,t} \\ e^{2\,\mathrm{I}\,t} + e^{-2\,\mathrm{I}\,t} \end{bmatrix}$$

$$evalc(x_{\mathbb{C}}(t)) = \begin{bmatrix} 2 \sin(2\,t) \\ 2 \cos(2\,t) \end{bmatrix}$$

Konklusion: den betingede løsning er $\underline{\underline{x_1(t) = 2 \cdot \sin(2 \cdot t)}}$ og $\underline{\underline{x_2(t) = 2 \cdot \cos(2 \cdot t)}}$

Tjek

$dsolve(\{x_1'(t) = 2 \cdot x_2(t), x_2'(t) = -2 \cdot x_1(t), x_1(0) = 0, x_2(0) = 2\}) =$

$\{x_1(t) = 2 \sin(2\,t), x_2(t) = 2 \cos(2\,t)\}$