Eksamensopgave 9. december 2013, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E13)

Opgave 1

Om et inhomogent lineært ligningssystem oplyses at dets totalmatrix **T** ved fuldstændig reduktion opnår formen

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv antallet af ligninger og ubekendte i ligningssystemet. Bestem endvidere rangen af ligningssystemets koefficientmatrix og totalmatrix.
2. Undersøg hvilke af de følgende talsæt der tilhører ligningssystemets løsningsmængde:

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,4,1)\,,\ \mathbf{x}_2 = (1,-2,0,1)\,,\ \mathbf{x}_3 = (0,-1,4,-1)\,.$$

3. Opskriv på standard-parameterform løsningsmængden for det til ligningssystemet hørende homogene lineære ligningssystem.

> *restart*

> *with(LinearAlgebra)* :

1.1

> $trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Der er 3 *ligninger* (nemlig antal rækker), og 4 *ubekendte* (nemlig antal søjler minus 1, da sidste søjle repræsenterer højresiden).
Husk at vi får at vide, at ligningssystemet er inhomogent. Hvis det var homogent, ville der være 5 ubekendte!

> *Rank(trapT)*

$$3 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

NB: Koefficientmatricen, som aflæses er IKKE den originale matrix A. Derfor kaldes den her M. Men A og M har samme rang!

> *M := SubMatrix(trapT, [1 ..3], [1 ..4])*

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.3)}$$

> $Rank(M)$

$$3 \qquad (1.1.4)$$

Rangen af både koefficientmatricen og totalmatricen er $\underline{\underline{3}}$.

(NB: passer med 3 initial-ettaller i trap(T)-matricen).

1.2

> $h := SubMatrix(trapT, [1..3], [5..5])$

$$h := \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2.1)$$

> $M.\langle 1, 0, 4, 1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2.2)$$

> $M.\langle 1, -2, 0, 1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2.3)$$

> $M.\langle 0, -1, 4, -1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2.4)$$

Kun $\underline{\underline{x_3 = (0, -1, 4, -1)}}$ er en løsning til ligningssystemet.

1.3

> $LinearSolve(M, \langle 0, 0, 0\rangle)$

$$\begin{bmatrix} -2\_t_4 \\ \_t_4 \\ 0 \\ \_t_4 \end{bmatrix} \qquad (1.3.1)$$

Den fuldstændige løsning til det tilhørende **homogene** ligningsystem er
$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 1)}}$ hvor $t \in \mathbb{R}$

Opgave 2

I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{v}_3 = (1,0,-1).$$

1. Gør rede for at vektorsættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Om en reel 3×3 matrix $\mathbf{A}$ oplyses at $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_3$.

2. Gør rede for at 1, 2 og -1 er egenværdier for $\mathbf{A}$, og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter.

Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning som med hensyn til standardbasen for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$.

3. Find afbildningsmatricen for f med hensyn basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
4. Bestem $\mathbf{A}$.

```
> restart
> with(LinearAlgebra) :
```

2.1

```
> v1 := ⟨1, 0, 1⟩ : v2 := ⟨0, 1, 0⟩ : v3 := ⟨1, 0, -1⟩ :
> M := ⟨v1|v2|v3⟩
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

```
> Rank(M)
```

$$3 \tag{2.1.2}$$

Da $\mathbb{R}^3$ er 3-dimensionelt, og de 3 givne vektorer er lineært uafhængige, så udgør de en basis for $\mathbb{R}^3$.

2.2

Da $Av_1 = 1 \cdot v_1$, $av_2 = 2 \cdot v_2$ og $Av_3 = -1 \cdot v_3$, er tallene $\underline{\underline{1, 2\ og\ -1}}$ alle egenværdier for matricen M.

Af oplysningerne fremgår det, at de algebraiske multipliciteter for de 3 egenværdier alle er ≥ 1.
$am(-1) \geq 1, am(2) \geq 1, am(1) \geq 1$ så $am(-1) + am(2) + am(1) \geq 3$
Summen kan maksimalt være 3 fordi vi er i $\mathbb{R}^3$, derfor må de alle am må være 1.
Vi ved også, at hvis $am(\lambda) \geq 1 \Rightarrow gm(\lambda) \geq 1$. Samt at $am(\lambda) = 1 \Rightarrow gm(\lambda) = 1$.
Det betyder så, at alle gm må være 1.

Konklusion: $\underline{\underline{am(-1) = gm(-1) = am(2) = gm(2) = am(1) = gm(1) = 1}}$

2.3

Da de 3 givne vektorer alle er egenvektorer svarende til egenværdierne -1, 2 og 1, bliver afbildningsmatricen i v- koordinatsystemet en diagonalmatrix med 1, 2 og -1 i diagonalen.

> $vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

Afbildningsmatricen for f i $v-$koordinaterne er givet ved $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.4

Koordinatskifte-matricen er givet ved:

> $eMv := M$

$$eMv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

Og den omvendte ved:

> $vMe := (eMv)^{-1}$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.4.2}$$

> $eFe := eMv.vFv.vMe$

$$eFe := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

Afbildningsmatricen for f i $e-$koordinaterne er givet ved $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opgave 3

1. Løs den homogene lineære førsteordens differentialligning $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+t\cdot x(t)=0$.

En lineær afbildning $f: \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ er givet ved

$$f(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+t\cdot x(t).$$

2. Angiv kernen for f.

3. Funktionen $q(t)$ er givet ved $q(t)=f(t-2)$. Bestem den fuldstændige løsning til ligningen

$$f(x(t)) = q(t).$$

> *restart*

3.1

> $DiffLign := x'(t) + t\cdot x(t)$

$$DiffLign := \mathrm{D}(x)(t) + t\,x(t) \quad \textbf{(3.1.1)}$$

> $dsolve(DiffLign = 0)$

$$x(t) = \_C1\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \quad \textbf{(3.1.2)}$$

Løsningen til den lineære homogene 1. ordens differentialligning er $x(t) = c\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot t^2}$ hvor $c \in \mathbb{R}$

3.2

Kernen for den lineære afbildning f er $span\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot t^2}\right\}$

Fremgår direkte af definitionen af f samt løsningen af spørgsmål (a).

3.3

Beregner $f(t-2)$:

> $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-2) + t\cdot(t-2);\ expand(\%)$

$$1 + t\,(t-2)$$
$$t^2 - 2\,t + 1 \quad \textbf{(3.3.1)}$$

> $dsolve(DiffLign = \%)$

$$x(t) = t - 2 + \_C1\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \quad \textbf{(3.3.2)}$$

Løsningen til den lineære inhomogene 1. ordens differentialligning er $x(t) = t - 2 + c\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot t^2}$

hvor $c \in \mathbb{R}$

NB: Det er klart, at $t-2$ er en partikulær løsning pga. den måde $q(t)$ er defineret!
Og den homogene løsning er kendt fra spørgsmål (a).
Derfor følger løsningen til den inhomogene ligning af struktursætningen: metode 11.11 i eNote 11.

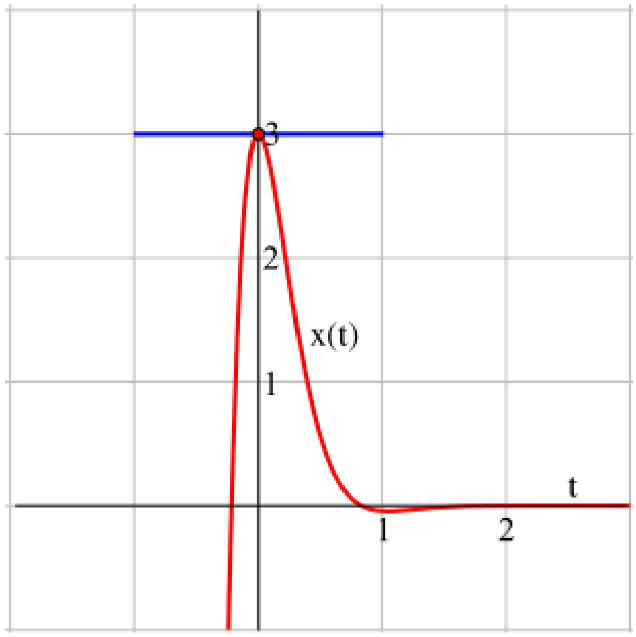
Opgave 4

Lad a være et reelt tal. En lineær homogen andenordens differentialligning med konstante koefficienter har karakterligningen

$$\lambda^2 + a\cdot\lambda + 25 = 0\,.$$

1. Opskriv differentialligningen, idet den ubekendte funktion betegnes $x(t)$.
2. Bestem for $a = 0$ samtlige løsninger til karakterligningen og find ved hjælp heraf samtlige løsninger til differentialligningen.
3. Bestem den værdi af a for hvilken $x(t) = \mathrm{e}^{-4t}\cdot\cos(3t)$ er en løsning til differentialligningen.

På figuren vises grafen for en partikulær løsning til differentialligningen med $a = 8$. På figuren er også grafens tangent i røringspunktet $(0,3)$ indtegnet.



4. Bestem den på figuren viste partikulære løsning til differentialligningen.

> *restart*

4.1

Karakterligningen for den lineære homogene 2. ordens differentialligning er $\lambda^2 + a\cdot\lambda + 25 = 0$.
Derfor lyder differentialligningen: $x''(t) + a\cdot x'(t) + 25\cdot x(t) = 0$

4.2

> *solve*(*subs*($a = 0, \lambda^2 + a\cdot\lambda + 25 = 0$), λ)

$5\,\mathrm{I},\ -5\,\mathrm{I}$ **(4.2.1)**

Løsningen til den karakterligningen for $a = 0$ er $\pm 5\cdot i$

> $DiffLign := x''(t) + a\cdot x'(t) + 25\cdot x(t) = 0$

$DiffLign := \mathrm{D}^{(2)}(x)(t) + a\,\mathrm{D}(x)(t) + 25\,x(t) = 0$ **(4.2.2)**

> *dsolve*(*subs*($a = 0$, *DiffLign*))

$x(t) = \_C1\,\sin(5\,t) + \_C2\,\cos(5\,t)$ **(4.2.3)**

Den fuldstændige løsning til differentialligningen for $a = 0$ er givet ved
$c_1 \cdot \sin(5 \cdot t) + c_2 \cdot \cos(5 \cdot t)$ hvor $c_1 \in \mathbb{R}$ og $c_2 \in \mathbb{R}$

NB: Svaret må ikke fremkomme via Maple, da man skal anvende de beregnede værdier i λ.
Svaret følger af sætning 13.2 formel 13.10 i eNote 13, hvor $\alpha = 0$ og $\beta = 5$.

4.3

> *Løsning*$(t) := e^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t)$:

> *subs*$(x = Løsning, DiffLign)$

$$D^{(2)}(Løsning)(t) + a\, D(Løsning)(t) + 25\, Løsning(t) = 0 \quad (4.3.1)$$

> *expand*(%); *simplify*(%)

$$\frac{128 \cos(t)^3}{(e^t)^4} - \frac{96 \cos(t)}{(e^t)^4} + \frac{96 \sin(t) \cos(t)^2}{(e^t)^4} - \frac{24 \sin(t)}{(e^t)^4} - \frac{16\, a \cos(t)^3}{(e^t)^4} + \frac{12\, a \cos(t)}{(e^t)^4} - \frac{12\, a \sin(t) \cos(t)^2}{(e^t)^4} + \frac{3\, a \sin(t)}{(e^t)^4} = 0$$

$$-e^{-4t} (a - 8) \left(16 \cos(t)^3 + 12 \sin(t) \cos(t)^2 - 12 \cos(t) - 3 \sin(t)\right) = 0 \quad (4.3.2)$$

> *solve*(%, a)

$$8 \quad (4.3.3)$$

$e^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t)$ er en løsning til differentialligningen, hvis $a = 8$

4.4

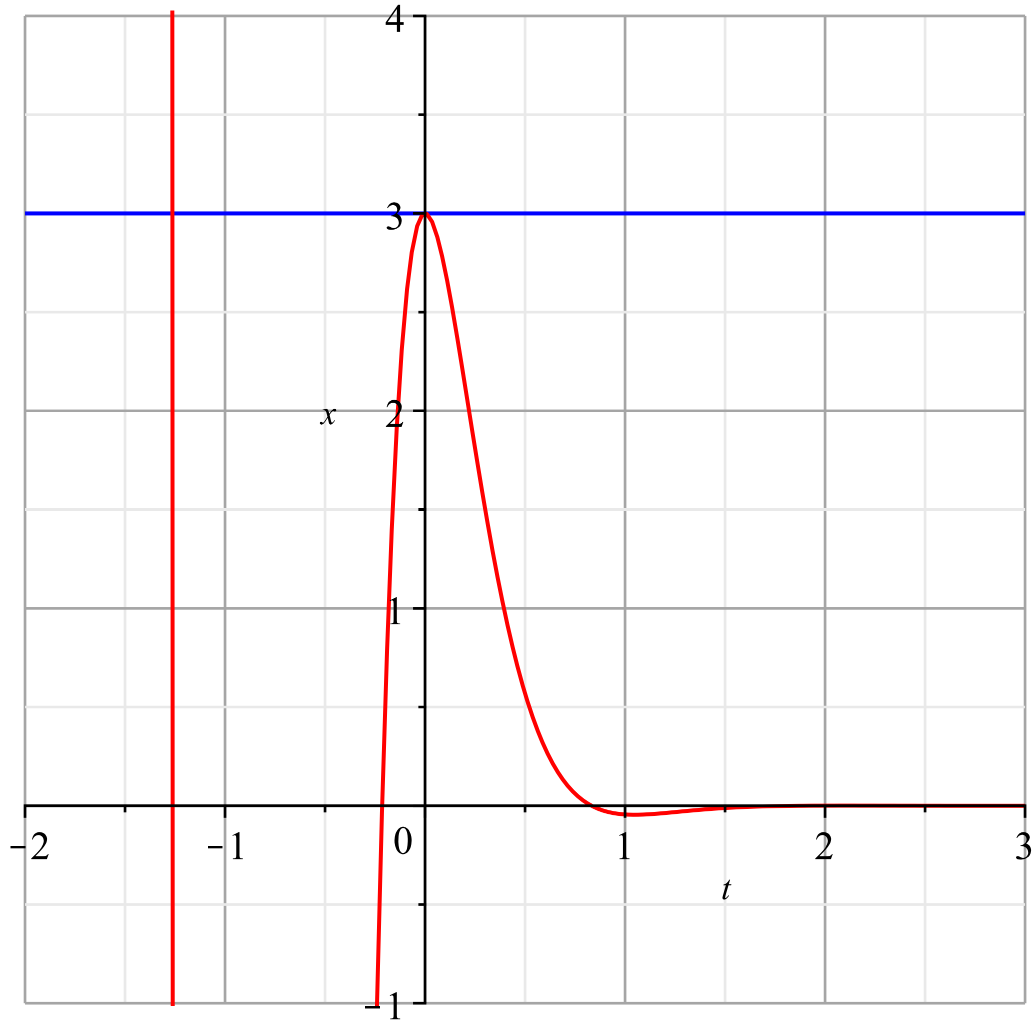
Figuren må tolkes således, at der for løsningen i tilfældet $a = 8$ gælder, at $x(0) = 3$ og $x'(0) = 0$, idet grafen skærer y-aksen i 3, hvor der er vandret tangent.

> *dsolve*$(\{subs(a = 8, DiffLign), x(0) = 3, x'(0) = 0\})$

$$x(t) = 4\, e^{-4t} \sin(3\, t) + 3\, e^{-4t} \cos(3\, t) \quad (4.4.1)$$

Den partikulære løsning er $x(t) = 3 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) + 4 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t)$

> *plot*$\left(\{3 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) + 4 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t), 3\}, t = -2 ..3, x = -1 ..4, color = [blue, red], gridlines\right)$



> $evalf\left(subs\left(t=-2, 3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t) + 4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\sin(3\cdot t)\right)\right)$

$$11918.38530 \qquad (4.4.2)$$

> $evalf\left(subs\left(t=-1, 3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t) + 4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\sin(3\cdot t)\right)\right)$

$$-192.9748421 \qquad (4.4.3)$$

NB: Grafen i eksamensopgaven passer ikke for $-2 < x < -1$. Der mangler et del af grafen!

Her går funktionsværdien helt agurk! Fra -193 i $x=-1$ til 11918 i $x=-2$.