Eksamensopgave 8. december 2014, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E14)

OPGAVE 1

Et reelt lineært ligningssystem er givet ved:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= -5 \end{aligned}$$

1. Bestem trappeformen til ligningssystemets totalmatrix, og opskriv den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ har med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ afbildningsmatricen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Bestem kernen for f, og angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

```
> restart
> with(LinearAlgebra) :
```

1.1

Koefficientmatricen A opskrives:

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Højresiden b af ligningssystemet opskrives:

> $b := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$b := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

Totalmatricen T opskrives:

> $T := \langle A|b \rangle$

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

Trappeformen af totalmatricen beregnes:

> $TrapT := ReducedRowEchelonForm(T)$

$$TrapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

Konklusion: trappeformen af totalmatricen er $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Løsning af ligningssystemet:

> $LinearSolve(A, b, free = t)$

$$\begin{bmatrix} -3 - 3\, t_3 \\ -2 - t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

eller:

> $LinearSolve(TrapT, free = t)$

$$\begin{bmatrix} -3 - 3\, t_3 \\ -2 - t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

Konklusion: den fuldstændige løsning til ligningssystemet er givet ved

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hvor $t \in \mathbb{R}$.

1.2

NB: Matricen F er identisk med ovenstående matrix A.

Derfor er kernen for f identisk med den homogene løsning til ligningssystemet.

Dvs. kernen er $t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hvor $t \in \mathbb{R}$.

eller

Kernen beregnes som de vektorer i $\mathbb{R}^3$, der afbildes i nulvektoren i $\mathbb{R}^4$:

> $F := A$

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

> $Nul := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Nul := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

> $LinearSolve(F, Nul, free = t)$

$$\begin{bmatrix} -3\,t_3 \\ -t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

eller

Direkte med Maple:

> $NullSpace(F)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{1.2.4}$$

Konklusion: kernen for f er $span\{(-3, -1, 1)\}$

Kernen har således dimension 1.
Dimensionssætningen fortæller så, at billedrummet har dimension 2, nemlig
$n - dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2$.

Billedrummet er udspændt af 2 lineært uafhængige søjlevektorer fra afbildningsmatricen F.
I følge trappeformen ovenfor, er de 2 første søjler lineært uafhængige. De udgør derfor en basis for billedrummet.

Konklusion: basis for billedrummet er

$(1, 1, -2, 1)$ *og* $(0, -2, 4, 1)$

OPGAVE 2

En lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter har formen

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = q(t).$$

hvor t er en reel variabel, og $q(t)$ er en kontinuert funktion.

1. Antag $q(t) = 0$ for $t \in \mathbb{R}$. Find løsningerne til differentialligningens karakterligning, og opstil ved hjælp heraf den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.
2. Antag $q(t) = e^{2it}$ for $t \in \mathbb{R}$. Bestem et tal $c \in \mathbb{C}$ således at funktionen ce^{2it} er en løsning til differentialligningen.
3. Antag $q(t) = 4\cos(2t)$ for $t \in \mathbb{R}$. Bestem ved hjælp af resultaterne i spørgsmål 1 og 2 den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.

> *restart*

2.1

> $DiffLign := x''(t) - 8 \cdot x'(t) + 16 \cdot x(t) = q(t)$

$$DiffLign := D^{(2)}(x)(t) - 8\,D(x)(t) + 16\,x(t) = q(t) \qquad (2.1.1)$$

Differentialligningens karakterligning:

> $KarLign := \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 16 = 0$

$$KarLign := \lambda^2 - 8\,\lambda + 16 = 0 \qquad (2.1.2)$$

Karakterligningen løses:

> $solve(KarLign, \lambda)$

$$4, 4 \qquad (2.1.3)$$

Faktorisering af karakterligningen:

> $factor(KarLign)$

$$(\lambda - 4)^2 = 0 \qquad (2.1.4)$$

Konklusion: karakterligningen har en **dobbeltrod**, som er 4

Løsning ved brug af sætning 13.2, formel 13-11, i eNoterne:

- Dobbeltroden λ giver løsningen

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (13\text{-}11)$$

Konklusion: den fuldstændige reelle løsning er $x(t) = c_1 \cdot e^{4 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{4 \cdot t}$, hvor

$c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

NB: Direkte løsning i Maple:

> $DiffLign1 := subs(q(t) = 0, DiffLign)$

$$DiffLign1 := D^{(2)}(x)(t) - 8\,D(x)(t) + 16\,x(t) = 0 \qquad (2.1.5)$$

> $dsolve(DiffLign1)$

$$x(t) = \_C1\, e^{4t} + \_C2\, e^{4t}\, t \tag{2.1.6}$$

2.2

> $DiffLign2 := subs\left(q(t) = e^{2 \cdot I \cdot t}, DiffLign\right)$

$$DiffLign2 := D^{(2)}(x)(t) - 8\, D(x)(t) + 16\, x(t) = e^{2\, I\, t} \tag{2.2.1}$$

> $xGÆT(t) := c \cdot e^{2 \cdot I \cdot t}$

$$xGÆT := t \rightarrow c\, e^{2\, I\, t} \tag{2.2.2}$$

> $subs(x = xGÆT, DiffLign2);\ simplify(\%)$

$$D^{(2)}(xGÆT)(t) - 8\, D(xGÆT)(t) + 16\, xGÆT(t) = e^{2\, I\, t}$$

$$(12 - 16\, I)\, c\, e^{2\, I\, t} = e^{2\, I\, t} \tag{2.2.3}$$

> $c2 := solve(\%, c)$

$$c2 := \frac{3}{100} + \frac{I}{25} \tag{2.2.4}$$

Konklusion: tallet $\underline{\underline{c = \frac{3}{100} + \frac{1}{25} \cdot i}}$

2.3

$q(t) = 4 \cdot \cos(2 \cdot t) = 4 \cdot \mathrm{Re}\left(e^{2 \cdot i \cdot t}\right)$

Da differentialligningen er lineær, er den partikulære løsning blot 4 gange den, som blev fundet i spørgsmål 2.

> $4 \cdot \mathrm{Re}\left(c2 \cdot e^{2 \cdot I \cdot t}\right);\ evalc(\%)$

$$\frac{4\, \Re\left(\left(\frac{3}{4} + I\right) e^{2\, I\, t}\right)}{25}$$

$$\frac{3 \cos(2\, t)}{25} - \frac{4 \sin(2\, t)}{25} \tag{2.3.1}$$

Den partikulære løsning er således: $\frac{3}{25} \cos(2\, t) - \frac{4}{25} \sin(2\, t)$.

Fra spørgsmål 1 kendes den fuldstændige løsning til det homogene differentialligningssystem.

Konklusion: den fuldstændige reelle løsning er

$\underline{\underline{x(t) = c_1 \cdot e^{4 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{4 \cdot t} + \frac{3}{25} \cos(2 \cdot t) - \frac{4}{25} \sin(2 \cdot t)}}$, hvor $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

NB: Direkte løsning i Maple:

> $DiffLign3 := subs(q(t) = 4 \cdot \cos(2 \cdot t), DiffLign)$

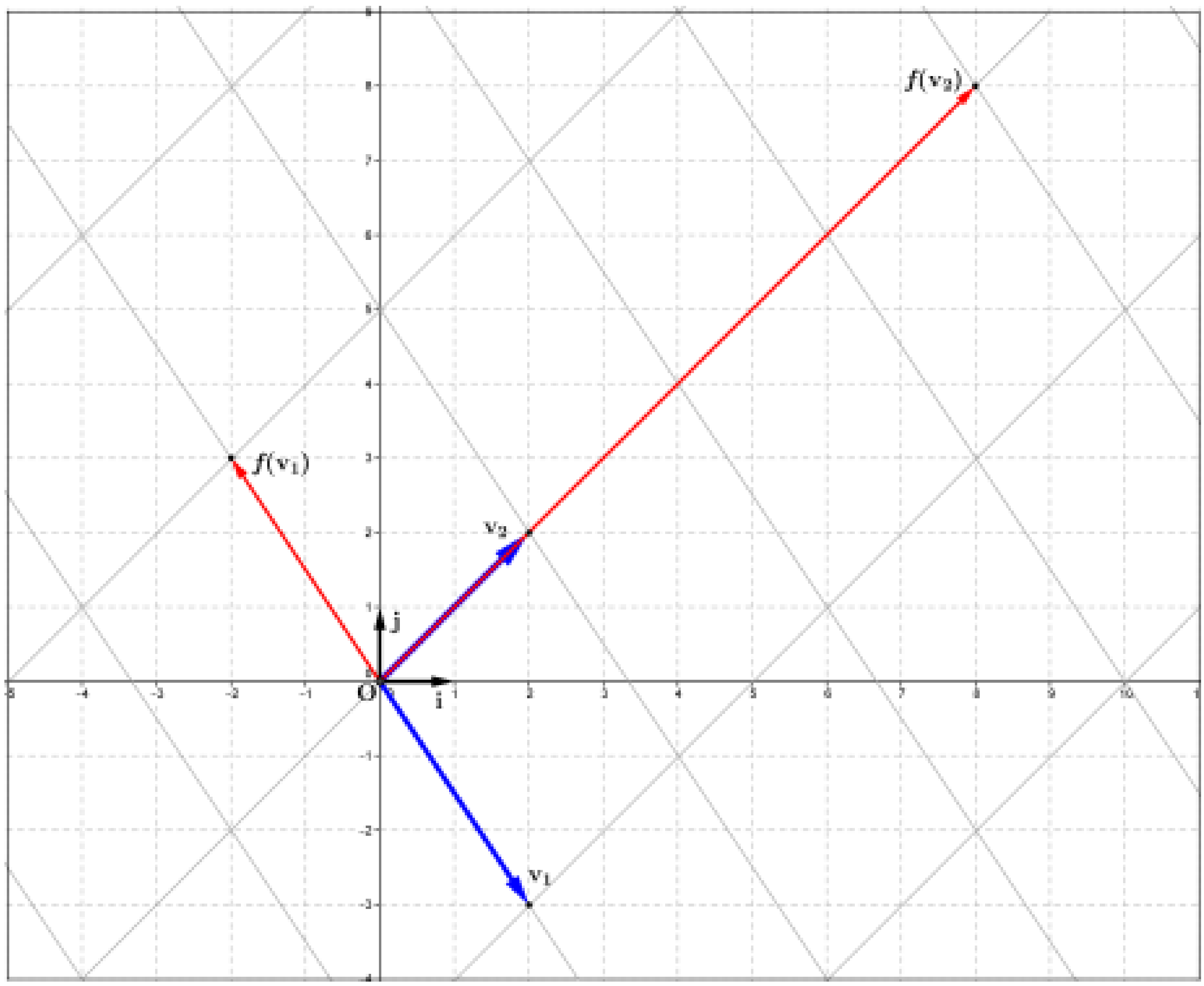
$$DiffLign3 := D^{(2)}(x)(t) - 8\, D(x)(t) + 16\, x(t) = 4 \cos(2\, t) \tag{2.3.2}$$

> $dsolve(DiffLign3)$

$$x(t) = e^{4t}\, \_C2 + e^{4t}\, t\, \_C1 + \frac{3 \cos(2\, t)}{25} - \frac{4 \sin(2\, t)}{25} \tag{2.3.3}$$

OPGAVE 3

I planen er der givet et sædvanligt retvinklet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, hvor alle vektorer tænkes afsat ud fra origo. Den tilhørende standardbasis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes med e. En ny basis $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er indtegnet i koordinatsystemet, se figuren nedenfor.



1. Opstil basisskiftematricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}}$ som skifter fra v-koordinater til e-koordinater.

Ved en lineær afbildning f af mængden af vektorer i planen ind i mængden af vektorer i planen bliver vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ afbildet som vist på figuren.

2. Gør rede for at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for f, og angiv deres tilhørende egenværdier.
3. Bestem den til f hørende afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$, og vis at den til f hørende afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$ er givet ved
$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}. $$
4. En vektor $\mathbf{x}$ er givet ved sin koordinatvektor med hensyn til basis v således: ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   Bestem koordinatvektoren for $f(\mathbf{x})$ med hensyn til standardbasen.
5. Bestem to tal a og b som opfylder
$$ f(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}. $$

> *restart*

> *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

Basisskiftematricen *eMv* har som søjler de 2 vektorer v_1 og v_2 .
Først aflæses de 2 vektorer:

> $v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

> $v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

> $eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$

$$eMv := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

Konklusion: basisskiftematricen er $eMv = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3.2

v_1 og v_2 er egenvektorer, hvis $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ og hvis $f(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2$.
På figuren ses straks, at $f(v_1) = -v_1$ og $f(v_2) = 4 \cdot v_2$.

Konklusion: v_1 og v_2 er egenvektorer for f , og egenværdierne er -1 og 4 .

3.3

Afbildningsmatricen er i v-basis givet ved en matrix, hvor søjlerne er $f(v_1)$ og $f(v_2)$.

Konklusion: afbildningsmatricen er $vFv = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

> $vFv := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$vFv := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

Afbildningsmatricen eFv er givet ved formlen: $eFv = eMv \cdot vFv$:

> $eFv := eMv.vFv$

$$eFv := \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

Konklusion: afbildningsmatricen er $eFv = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

3.4

Svaret findes direkte ved udregningen:

> $vX := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$vX := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

> $fx := eFv.vX$

$$fx := \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

Konklusion: $f(x) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 10 \cdot i + 5 \cdot j$ i standardbasis.

3.5

> $vMe := (eMv)^{-1}$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

> $eFe := eFv.vMe$

$$eFe := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

> $LinearSolve(eFe, fx)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

Konklusion: de 2 tal er $a = 0$ og $b = 5$ og der er ikke andre løsninger!

OPGAVE 4

I et givet system af to lineære førsteordens differentialligninger med konstante koefficienter er de to ubekendte funktioner benævnt $x_1(t)$ og $x_2(t)$. Samtlige løsninger til differentialligningssystemet er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ for } t \in \mathbb{R} \text{ og } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som opfylder

$$x_1(0) = -1 \text{ og } x_2(0) = 13.$$

Lad **A** betegne differentialligningssystemets systemmatrix.

2. Angiv de to egenværdier for **A**, og opskriv for hver af egenværdierne det tilhørende egenrum.

3. Opstil differentialligningssystemet.

> *restart*

4.1

> $x_1(t) := c_1 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot 1 + c_2 \cdot e^{5 \cdot t} \cdot 2;$
> $x_2(t) := c_1 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot 2 + c_2 \cdot e^{5 \cdot t} \cdot (-1)$

$$x_1 := t \to c_1 e^{3t} + 2\, c_2 e^{5t}$$
$$x_2 := t \to 2\, c_1 e^{3t} - c_2 e^{5t} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

> $L := solve(\{x_1(0) = -1, x_2(0) = 13\}, \{c_1, c_2\})$

$$L := \{c_1 = 5, c_2 = -3\} \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

> $c_1 := rhs(\textbf{(4.1.2)}[1]);\ c_2 := rhs(\textbf{(4.1.2)}[2])$

$$c_1 := 5$$
$$c_2 := -3 \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

> $'x_1(t)' = x_1(t);$
> $'x_2(t)' = x_2(t)$

$$x_1(t) = 5\, e^{3t} - 6\, e^{5t}$$
$$x_2(t) = 10\, e^{3t} + 3\, e^{5t} \qquad \textbf{(4.1.4)}$$

Konklusion: løsningen er $\underline{\underline{x_1(t) = 5 \cdot e^{3 \cdot t} - 6 \cdot e^{5 \cdot t}}}$ og $\underline{\underline{x_2(t) = 10 \cdot e^{3 \cdot t} + 3 \cdot e^{5 \cdot t}}}$

4.2

Metode 12.4 formel 12-44 i eNoterne anvendes:

- **To reelle enkeltrødder.** I så fald har begge egenværdier λ_1 og λ_2 algebraisk multiplicitet 1 og geometrisk multiplicitet 1, og vi kan sætte

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \qquad (12\text{-}24)$$

De 2 egenværdier aflæses direkte fra oplysningerne om løsningen i opgaven, idet egenværdierne er faktorerne foran t i eksponentilafunktionerne.

Konklusion: egenværdierne for systemmatricen er $\underline{3}$ og $\underline{5}$

Egenvektorerne kan også direkte aflæses fra oplysningerne om løsningen i starten af opgaven. Egenrummene er udspændt af de 2 vektorer i løsningen.

Konklusion: egenrummene er $\underline{\underline{E_3 = span\{(1, 2)\}}}$ - som svarer til egenværdien 3, og

$E_5 = span\{(2,-1)\}$ - som svarer til egenværdien 5

4.3

Diagonalmatrix:

> $Diag := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$Diag := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

> $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

> $v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

> $V := \langle v_1 | v_2 \rangle$

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.3.4}$$

Systemmatrix:

> $A := V.Diag.V^{-1}$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

eller

Antag at $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, og løser dette:

> $L1 := unapply\left(x_1'(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t), t\right);$
> $L2 := unapply\left(x_2'(t) = c \cdot x_1(t) + d \cdot x_2(t), t\right)$

$$L1 := t \mapsto 15\,e^{3t} - 30\,e^{5t} = a\left(5\,e^{3t} - 6\,e^{5t}\right) + b\left(10\,e^{3t} + 3\,e^{5t}\right)$$
$$L2 := t \mapsto 30\,e^{3t} + 15\,e^{5t} = c\left(5\,e^{3t} - 6\,e^{5t}\right) + d\left(10\,e^{3t} + 3\,e^{5t}\right) \tag{4.3.6}$$

> $solve(\{L1(0), L2(0), L1(1), L2(1)\}, \{a, b, c, d\})$

$$\left\{a = \frac{23}{5}, b = -\frac{4}{5}, c = -\frac{4}{5}, d = \frac{17}{5}\right\} \tag{4.3.7}$$

Konklusion: differentialligningssystemet er på matrix form

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

og opskrevet som 2 differentialligninger: $\begin{cases} x_1'(t) = \frac{23}{5} \cdot x_1(t) - \frac{4}{5} \cdot x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{4}{5} \cdot x_1(t) + \frac{17}{5} \cdot x_2(t) \end{cases}$