Eksamensopgave 7. december 2015, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E15)

OPGAVE 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. En matrix $\mathbf{A}$ og en vektor $\mathbf{b}$ er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Løs for $a = 2$ matrixligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Bestem for enhver værdi af a determinanten af $\mathbf{A}$ og rangen af $\mathbf{A}$.
3. Find den værdi af a for hvilken matrixligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsningsmængden

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

> *restart*

> *with(LinearAlgebra)* :

1.1

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} :$

> $LinearSolve(subs(a = 2, A), b)$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Konklusion: ligningsystemet har præcis én løsning: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

1.2

> *Determinant*(*A*)

$$-2\,a+1 \tag{1.2.1}$$

Når determinanten $\neq 0$, så er rangen af A = 4.

Undersøger, om determinanten kan blive 0:

> *solve*(% = 0, *a*)

$$\frac{1}{2} \tag{1.2.2}$$

> *Rank*(*subs*(*a* = %, *A*))

$$3 \tag{1.2.3}$$

Konklusion: rangen af A er $\begin{cases} 3 \text{ når } a = \frac{1}{2} \\ 4 \text{ når } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{cases}$

1.3

Når A er regulær, er der kun én løsning til ligningssystemet.

Derfor er eneste mulighed, at $a = \frac{1}{2}$, i følge spørgsmål 2 ovenfor.

Løsningen undersøges i det tilfælde:

> $LinearSolve\left(subs\left(a = \frac{1}{2}, A\right), b\right)$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 + \_t0_{1,1} \\ \_t0_{1,1} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

Resultatet kan skrives: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Det er jo netop det man skal vise! Så OK.

OPGAVE 2

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ givet ved afbildningsmatricen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. Givet $\mathbf{v} = (1, -3, -3) \in \mathbb{R}^3$. Bestem $f(\mathbf{v})$.
2. Bestem en basis for kernen for f og dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

Lad $P_1(\mathbb{R})$ betegne mængden af reelle polynomier af højst første grad og $P_2(\mathbb{R})$ mængden af reelle polynomier af højst anden grad. En lineær afbildning $g : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ er fastlagt ved

$$g(1) = 1 - 2\cdot x,\; g(x) = -1 + 2\cdot x \text{ og } g(x^2) = 2 - 4\cdot x.$$

3. Bestem to forskellige polynomier $P(x), Q(x) \in P_2(\mathbb{R})$ som opfylder

$$g(P(x)) = g(Q(x)) = -2 + 4\cdot x.$$

> *restart*

> *with(LinearAlgebra)* :

2.1

> $F := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} : v := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} :$

> $F.v$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

Konklusion: $f(v) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2.2

Metode 1:

> $Nul := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$

> $LinearSolve(F, Nul)$

$$\begin{bmatrix} \_t_{2,1} - 2\,\_t_{1,1} \\ \_t_{2,1} \\ \_t_{1,1} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Metode 2:

> $NullSpace(F)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \textbf{(2.2.2)}$$

Resultatet kan skrives: $t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, hvor $t_1 \in \mathbb{R}$ og $t_2 \in \mathbb{R}$

Konklusion: kernen er $span\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$

Dvs. dimensionen af kernen er 2.

Dimensionen af billedrummet er så i følge dimensionssætningen:
$dim(f(\mathbb{R}^3)) = n - dim(Ker(f)) = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$

2.3

Afbildningsmatricen for g er præcis den samme som ovenfor, dvs. $G = F$!
Det fremgår af $g(1) = 1 - 2\cdot x$, $g(x) = -1 + 2\cdot x$, $g(x^2) = -2 + 4\cdot x$
idet man anvender monomie-basis i begge polynomiumsrum ($P_1(\mathbb{R})$ og $P_2(\mathbb{R})$).

Ligningen $g(P(x)) = -2 + 4\cdot x$ er den ligning, som er løst i spørgsmål 1 og 2, idet $-2 + 4\cdot x$ skrives $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ i monomie-basen!
Dvs. man kender allerede én løsning fra spørgsmål 1, nemlig $(1, -3, -3)$, som oversættes til dette polynomium: $\underline{\underline{P(x) = 1 - 3\cdot x - 3\cdot x^2}}$

$t_1 = 0$ og $t_2 = 1$.
Det giver løsningerne: $(1, 1, 0)$, som oversættes til polynomiet: $1 + x$
Hvis dette polynomium adderes til $P(x)$ får man en ny løsning:
$Q(x) = P(x) + 1 + x \Rightarrow \underline{\underline{Q(x) = 2 - 2\cdot x - 3\cdot x^2}}$

Tjek:

> $F.\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.1)}$$

> $F.\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.2)}$$

OK!

OPGAVE 3

En matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ har egenværdierne -2 og 5 med de tilhørende egenrum

$$E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \text{ og } E_5 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

1. Angiv en regulær matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der opfylder $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Lad $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ være givet ved $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ hvor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Vis at $\mathbf{C}$ har egenværdierne $-2+b$ og $5+b$ med de tilhørende egenrum

$$E_{-2+b} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \text{ og } E_{5+b} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

> *restart*

> *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

Da der er 2 egenværdier i en 2x2-matrix, så er de 2 egenrum lineært uafhængige af hinanden.
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er således en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer.

De 2 søjler udgør så matricen $V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

NB: Rækkefølgen er som egenværdierne i diagonalmatricen $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Tjek:

> $V := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$: $\Lambda := \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$:

NB: $V^{-1} \cdot A \cdot V = \Lambda \Leftrightarrow A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$

> $A := V.\Lambda.V^{-1}$

$$A := \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \qquad (3.1.1)$$

> *Eigenvectors*(*A*, *output* = *list*)

$$\left[\left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[5, 1, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right] \qquad (3.1.2)$$

Det stemmer nydeligt med opgavens tekst, blot er egenvektorerne modsat rettede!

3.2

> $B := \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$:

Metode 1:
Anvender matricen A, som netop er beregnet:

> *Eigenvectors*($A + B$, *output* = *list*)

$$\left[\left[b-2, 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[b+5, 1, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right] \qquad (3.2.1)$$

Konklusion: det ønskede fremgår direkte af Maples svar.
Egenværdierne for $C = A + B$ er

$b+5$ og $b-2$.

Egenrummene er: $E_{b-2} = span\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ og

$E_{b+5} = span\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

idet man anvender de modsat rettede basisvektor.

Metode 2:

Ved beregning af egenværdier for A anvendes matricen $A - \lambda_1 \cdot E$.

Ved beregning af egenværdier for $A+B$ anvendes matricen $(A+B) - \lambda_2 \cdot E$. Men da $B = b \cdot E$, så får man $A - (\lambda_2 - b) \cdot E$

Det betyder, at egenværdierne hænger således sammen: $\lambda_1 = \lambda_2 - \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \lambda_2 = b + \lambda_1$.

Fra spørgsmål ved man, at $\lambda_1 = -2 \vee \lambda_1 = 5$

Derfor bliver egenværdierne for $A+B$ matricen: $b-2$ og $b+5$

For egenvektorerne v gælder tilsvarende resultater:

$(A+B) \cdot v = \lambda_2 \cdot v \Leftrightarrow (A + b \cdot E) \cdot v = \lambda_2 \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v = \lambda_2 \cdot v - b \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v = (\lambda_2 - b) \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v = \lambda_1 \cdot v$

Sidstnævnte kendes fra spørgsmål 1, så egenvektorerne er som angivet.

OPGAVE 4

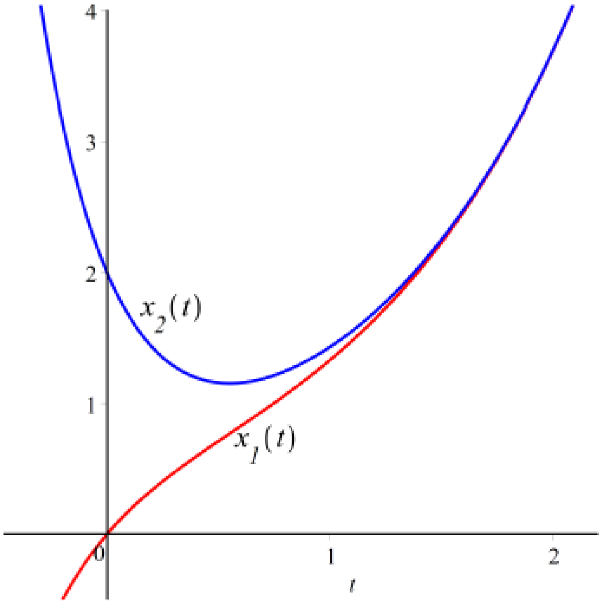
Et differentialligningssystem er givet ved

$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_2'(t) = 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot x_2(t)$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Lad $\mathbf{A}$ betegne den tilsvarende systemmatrix.

1. Bestem samtlige egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{A}$, og opstil ved hjælp heraf løsningsmængden for differentialligningssystemet.

2. En partikulær løsning $(x_1(t), x_2(t))$ til differentialligningssystemet er nedenfor illustreret ved at graferne for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er indsat i samme koordinatsystem. Bestem forskrifterne for $x_1(t)$ og $x_2(t)$.



3. Gør rede for at de to grafer som er vist på figuren ovenfor, ikke skærer hinanden for noget $t \in \mathbb{R}$.

> *restart*

> *with*(*LinearAlgebra*) :

4.1

> $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$:

Differentialligningssystemet kan så skrives på matrixform således:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

> *Eigenvectors*(*A*, *output* = *list*)

$$\left[\left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-3, 1, \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right] \quad \textbf{(4.1.1)}$$

Konklusion: egenværdierne for A er $\underline{\underline{-3}}$ og $\underline{\underline{1}}$,

og de tilhørende egenrum er $\underline{\underline{E_{-3} = span\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}}$ og $\underline{\underline{E_1 = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$

idet egenvektoren $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ forlænges med faktoren 3 til $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Løsning:

Metode 12.4 i eNoterne fortæller så, at den fuldstændige løsning kan skrives på formen:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hvor $c_1 \in \mathbb{R}$ og $c_2 \in \mathbb{R}$ samt $t \in \mathbb{R}$

Tjek:

> $dsolve(\{x_1'(t) = x_2(t), x_2'(t) = 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot x_2(t)\})$

$$\{x_1(t) = \_C1\, e^t + \_C2\, e^{-3t}, x_2(t) = \_C1\, e^t - 3\, \_C2\, e^{-3t}\} \quad \textbf{(4.1.2)}$$

OK. Passer, hvis c_1 sættes med modsat fortegn.

Kommentar:

Differentialligningsystemet er faktisk en homogen 2. orden differentialligning med konstante koefficienter!
Indsættes dem første ligning $x_2(t) = x_1'(t)$ i den anden ligning, får man:
$\boldsymbol{x_1''(t) = 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot x_1'(t) \Leftrightarrow x_1''(t) + 2 \cdot x_1'(t) - 3 \cdot x_1(t) = 0}$
Derfor man man finde $x_1(t)$ med sætning 13.2 fra eNote 13!

> $Karakterligning := \lambda^2 + 2 \cdot \lambda - 3 = 0 :$

> $solve(Karakterligning, \lambda)$

$$1, -3 \quad \textbf{(4.1.3)}$$

Derfor er $\underline{\underline{x_1(t) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot t} + c_2 \cdot e^t}}$

$x_2(t)$ kan så beregnes som $x_2(t) = x_1'(t) = \left(c_1 \cdot e^{-3 \cdot t} + c_2 \cdot e^t\right)' \Rightarrow \underline{\underline{x_2(t) = -3 \cdot c_1 \cdot e^{-3 \cdot t} + c_2 \cdot e^t}}$

4.2

Man ser straks, at den partikulære løsning må opfylde: $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 2$.

Metode 1:

> $solve(\{c_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} \cdot (-1) + c_2 \cdot e^0 \cdot 1 = 0, c_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} \cdot 3 + c_2 \cdot e^0 \cdot 1 = 2\})$

$$\left\{c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}\right\} \quad \textbf{(4.2.1)}$$

Konklusion: den partikulære løsning er $\underline{\underline{x_1(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-3 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^t}}$ og $\underline{\underline{x_2(t) = \frac{3}{2} \cdot e^{-3 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^t}}$

hvor $t \in \mathbb{R}$

Metode 2:

> $dsolve(\{x_1'(t) = x_2(t), x_2'(t) = 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot x_2(t), x_1(0) = 0, x_2(0) = 2\})$

$$\left\{x_1(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-3t}}{2}, x_2(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{3\, e^{-3t}}{2}\right\} \quad \textbf{(4.2.2)}$$

OK. Samme løsning!

4.3

Metode 1:

> $solve\left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-3 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^t = \frac{3}{2} \cdot e^{-3 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^t\right)$

Når Maple ikke giver noget svar, betyder det, at der ikke er nogen løsning!

Metode 2:
Håndregning af skæring:

$-\frac{1}{2}\cdot e^{-3\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}=\frac{3}{2}\cdot e^{-3\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot e^{-3\cdot t}=\frac{3}{2}\cdot e^{-3\cdot t}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Hvilket aldrig kan lade sig gøre!

Mere præcist er forskellen:

$x_2(t)-x_1(t)=\left(\frac{3}{2}\cdot e^{-3\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-3\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}\right)=2\cdot e^{-3\cdot t}$

Så for store værdier af t, vil forskellen hurtigt gå imod 0.

Konklusion: altså skærer de 2 grafer aldrig hinanden.