Eksamensopgave 5. december 2016, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E16)

Opgave 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et inhomogent lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med fire ubekendte x_1, x_2, x_3 og x_4 har totalmatricen $\mathbf{T}$ givet ved

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}.$$

1. Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet i hvert af de tilfælde hvor $a=-1$, $a=0$ og $a=1$.
2. Bestem de værdier af a for hvilke $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,-1,0)$ er en løsning.

> *restart*

> *with(LinearAlgebra) :*

1.1

> $T(a) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}:$

> *LinearSolve(T(-1))*

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

> $A(a) := T(a)[1..3, 1..4]:$

> $A(a)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & a & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -a^2+1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

> $Rank(T(-1)) \neq Rank(A(-1))$

$$3 \neq 2 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Rangen at koefficientmatricen er ikke lig med rangen af totalmatricen, derfor ingen løsning.

Den fuldstændige løsning for a = -1 er:

> *LinearSolve(T(0))*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \_t0_2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Den fuldstændige løsning for a = 0 er: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 1, -1) + t\cdot(0, 1, 0, 0)$ hvor $t \in \mathbb{R}$

> *LinearSolve(T(1))*

$$\begin{bmatrix} -\_t1_3 - 3\_t1_4 \\ 2 + 2\_t1_3 + 4\_t1_4 \\ \_t1_3 \\ \_t1_4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.4)}$$

Den fuldstændige løsning for a = 1 er:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 0, 0) + t_1 \cdot (-1, 2, 1, 0) + t_2 \cdot (-3, 4, 0, 1)$ hvor $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$

1.2

Højresiden i ligningssystemet er sidste søjle i T:

> $b := T(a)[1..3, 5..5]$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.1)}$$

Indsætter (1,0,-1,0) i ligningssystemet:

> $A(a).\langle 1, 0, -1, 0\rangle = b$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ a^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.2)}$$

Dette stemmer kun, hvis følgende er opfyldt:

> $solve(a^2 - 1 = 1 - a)$

$$1, -2 \quad \textbf{(1.2.3)}$$

(1,0,-1,0) er netop en løsning, hvis $\underline{\underline{a = 1 \lor a = -2}}$

Opgave 2

I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne $\mathbf{v}_1 = (-1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-4,0)$ og $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

1. Gør rede for at vektorsættet $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og opskriv basisskiftematricen ${}_e\mathbf{M}_v$ der skifter fra v-koordinater til standard e-koordinater.

2. Opskriv koordinatvektoren ${}_v\mathbf{u}$ for $\mathbf{u}$ med hensyn til basis v, og bestem koordinatvektoren ${}_e\mathbf{u}$ for $\mathbf{u}$ med hensyn til standardbasis e.

For en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gælder $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_2$ og $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$.

3. Gør rede for at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer for f, og bestem de egenværdier som de hører til.

4. Bestem afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for f med hensyn til basis v og afbildningsmatricen ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til standardbasis e.

5. Er $\mathbf{u}$ en egenvektor for f?

> $restart$

> $with(LinearAlgebra):$

2.1

> $v_1 := \langle -1, 1, 0 \rangle : v_2 := \langle 1, -2, 1 \rangle : v_3 := \langle 1, -4, 0 \rangle :$

> $Rank(\langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle)$

$$3 \tag{2.1.1}$$

Da rangen af matricen bestående af de 3 vektorer er 3 ($= dim(\mathbb{R}^3)$), så er (v_1, v_2, v_3) en basis for $\mathbb{R}^3$.

Basisskiftevektoren eMv består af de 3 basisvektorer som søjler:

$$eMv \tag{2.1.2}$$

> $eMv := \langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle$

$$eMv := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

Basisskiftevektoren $eMv = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2

Da $u = 2 \cdot v_1 - v_2$ så er u's koordinater i v-basis direkte givet ved:

> ${}_v u := \langle 2, -1, 0 \rangle$

$${}_v u := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

Dvs. ${}_v u = (2, -1, 0)$

I e-basis er u's koordinater:

> ${}_e u := 2 \cdot v_1 - v_2$

$${}_e u := \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

NB: Følger også ved brug af koordinatskiftematricen eMv :

> $eMv . {}_v u$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

Dvs. ${}_e u = (-3, 4, -1)$

2.3

En egenvektor v opfylder, at $f(v) = \lambda \cdot v$.
Derfor er v_1 og v_2 egenvektorer svarende til egenværdien 3, og v_3 er egenvektor svarende til egenværdien 0.

2.4

I følge (2.3) så er afbildningsmatricen $vFv = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

> $vFv := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

2.5

> ${}_{v}u$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.1)}$$

> $vFv.{}_{v}u$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.2)}$$

Det ses let, at $vFv.\,{}_{v}u = 3 \cdot {}_{v}u$, derfor er u en egenvektor for f.

Opgave 3

En lineær afbildning $f : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ er givet ved forskriften

$$(\star) \qquad f(x(t)) = x'(t) - t \cdot x(t) \ .$$

1. Bestem den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning $f(x(t)) = 0$.

Vi betragter nu f givet ved forskriften $(\star)$ som en afbildning fra $P_2(\mathbb{R})$ til $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

2. Bestem billederne $f(1)$, $f(t)$ og $f(t^2)$ af basisvektorerne i $P_2(\mathbb{R})$, og gør rede for at billedrummet $f(P_2(\mathbb{R}))$ er et underrum i $P_3(\mathbb{R})$.

Til sidst betragter vi f givet ved forskriften $(\star)$ som en afbildning fra $P_2(\mathbb{R})$ til $P_3(\mathbb{R})$.

3. Opstil afbildningsmatricen ${}_m\mathbf{F}_m$ for f med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$ og monomiebasen i $P_3(\mathbb{R})$. Bestem kernen for f og dimensionen af billedrummet $f(P_2(\mathbb{R}))$.

> *restart*

> *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

Det betyder, at man skal løse 1. ordens differentialligningen: $x'(t) - t \cdot x(t) = 0$

> $difflign := x'(t) - t \cdot x(t)$

$$difflign := \mathrm{D}(x)(t) - t\,x(t) \quad \textbf{(3.1.1)}$$

> $dsolve(difflign = 0)$

$$x(t) = \_C1\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \quad \textbf{(3.1.2)}$$

Dvs. den fuldstændige løsning er $x(t) = k \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t^2}$ hvor $k \in \mathbb{C}$

3.2

> $x(t) := 1 : difflign$

$$-t \tag{3.2.1}$$

> $x(t) := t : difflign$

$$-t^2 + 1 \tag{3.2.2}$$

> $x(t) := t^2 : difflign$

$$-t^3 + 2\,t \tag{3.2.3}$$

Dvs. $f(1) = -t\,, f(t) = -t^2 + 1, f(t^2) = -t^3 + 2 \cdot t$

Billedrummet er ALTID et underrum af $C^{\infty}(\mathbb{R})$.
Det ses, at mononiebasen for $P_2(\mathbb{R})$ afbildes ind i $P_3(\mathbb{R})$.
Derfor er billedrummet $f(P_2(\mathbb{R})) \subseteq P_3(\mathbb{R})$ og dermed er underrum i $P_3(\mathbb{R})$.

3.3

Direkte fra (3.2) kan afbildningsmatricen opskrives ved at se på $f(1), f(t), f(t^2)$:

> $mFm := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}:$

Dvs. afbildningsmatricen $mFm := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Direkte med kommandoen "NullSpace":

> $NullSpace(mFm)$

$$\varnothing \tag{3.3.1}$$

Ved at løse et ligningsystem:

> $LinearSolve(mFm, \langle 0, 0, 0, 0 \rangle)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

Eller ved brug af rangen af afbildningsmatricen:

> $Rank(mFm)$

$$3 \tag{3.3.3}$$

Derfor består kernen for f kun af nulpolynomiet, dvs. $ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$

Dimensionen af billedrummet $dim(f(P_2(\mathbb{R})) = n - dim(ker(f)) = 3 - 0 = 3$

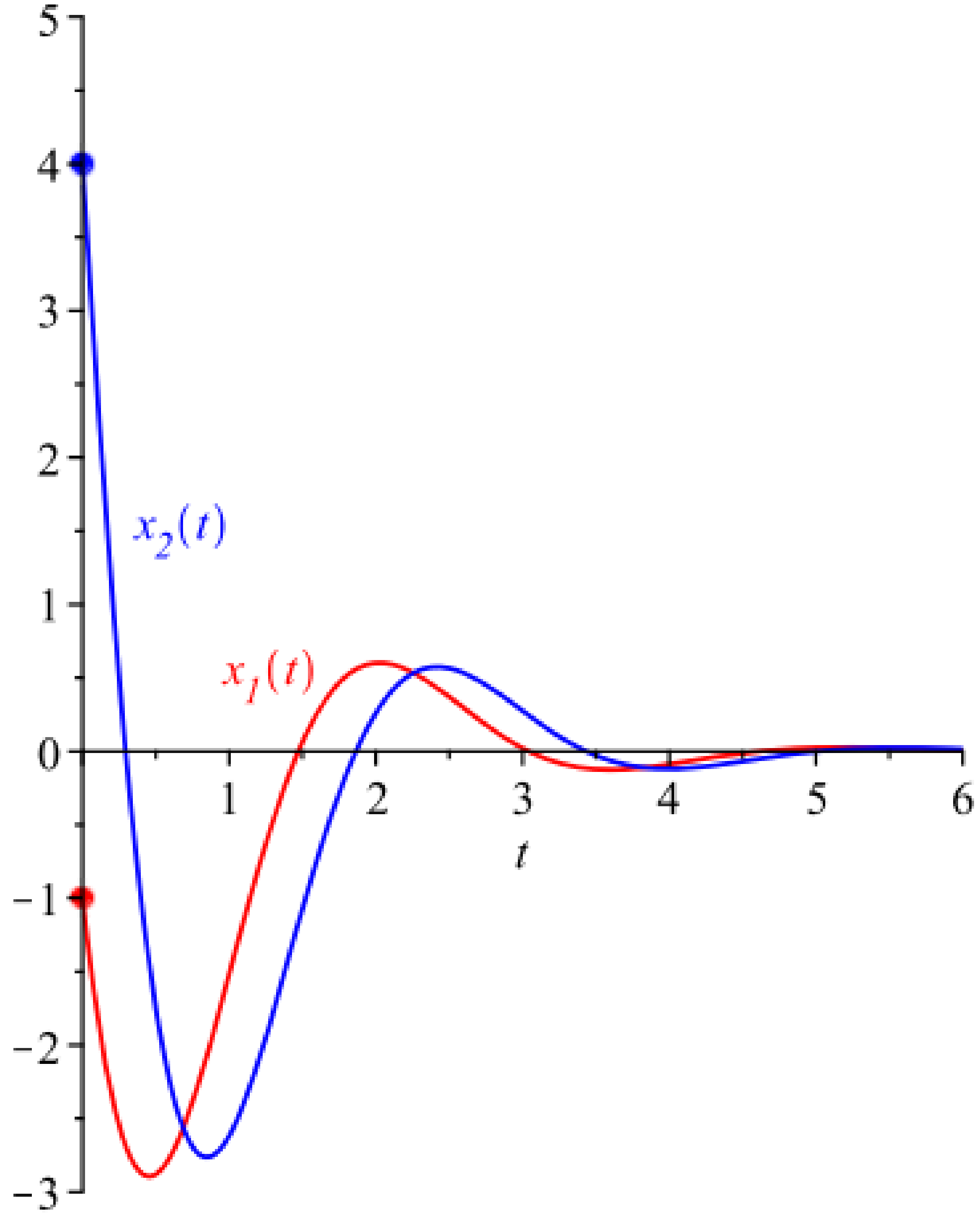
Opgave 4

Et homogent lineært 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en reel 2×2-matrix. Om $\mathbf{A}$ oplyses endvidere at den har egenvektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix}$ hørende til egenværdien $\lambda = -1+2i$.

1. Bestem den anden egenværdi som $\mathbf{A}$ har, og angiv en tilhørende egenvektor. Opskriv den fuldstændige *komplekse* løsning til differentialligningssystemet.
2. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som er illustreret på figuren. Svaret skal være udtrykt i reelle tal og reelle funktioner.



> *restart*

4.1

Den anden egenværdi er den komplekst konjugerede af den given λ, dvs. $-1-2 \cdot i$.

Den tilhørende egenvektor er den komplekst konjugerede af v, dvs.

$$\begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}$$

> $v := \begin{bmatrix} 1+I \\ 2 \end{bmatrix} : \lambda := -1+2\cdot I :$

Anvender sætning 12.2 i eNoterne. Den fuldstændige **komplekse** løsning er:

$x(t) = c_1 \cdot e^{(-1+2\cdot i)\cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{(-1-2\cdot i)\cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}$ hvor $c_1 \in \mathbb{C}$, $c_2 \in \mathbb{C}$

> $x(t) := c_1 \cdot e^{\lambda\cdot t} \cdot v + c_2 \cdot e^{\overline{\lambda}\cdot t} \cdot \overline{v} :$

> $x(t)$

$$\begin{bmatrix} (1+\mathrm{I})\, c_1\, e^{(-1+2\,\mathrm{I})\,t} + (1-\mathrm{I})\, c_2\, e^{(-1-2\,\mathrm{I})\,t} \\ 2\, c_1\, e^{(-1+2\,\mathrm{I})\,t} + 2\, c_2\, e^{(-1-2\,\mathrm{I})\,t} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

4.2

Aflæser følgende begyndelsesbetingelser på graferne: $x_1(0) = -1, x_2(0) = 4$

> $L := solve(\{x(0)[1,1] = -1, x(0)[2,1] = 4\}, \{c_1, c_2\})$

$$L := \left\{ c_1 = 1 + \frac{3\,\mathrm{I}}{2}, c_2 = 1 - \frac{3\,\mathrm{I}}{2} \right\} \quad (4.2.1)$$

> $c_1 := rhs(L[1]); c_2 := rhs(L[2])$

$$c_1 := 1 + \frac{3\,\mathrm{I}}{2}$$

$$c_2 := 1 - \frac{3\,\mathrm{I}}{2} \quad (4.2.2)$$

> $x(t)$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5\,\mathrm{I}}{2}\right) e^{(-1+2\,\mathrm{I})\,t} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5\,\mathrm{I}}{2}\right) e^{(-1-2\,\mathrm{I})\,t} \\ (2+3\,\mathrm{I})\, e^{(-1+2\,\mathrm{I})\,t} + (2-3\,\mathrm{I})\, e^{(-1-2\,\mathrm{I})\,t} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

> $evalc(x(t))$

$$\begin{bmatrix} -e^{-t} \cos(2\,t) - 5\, e^{-t} \sin(2\,t) \\ 4\, e^{-t} \cos(2\,t) - 6\, e^{-t} \sin(2\,t) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Den betingede løsning er givet ved: $x(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \cdot \cos(2\cdot t) - 5\, e^{-t} \cdot \sin(2\cdot t) \\ 4\, e^{-t} \cdot \cos(2\cdot t) - 6\, e^{-t} \cdot \sin(2\cdot t) \end{bmatrix}$