Eksamensopgave 10. december 2017, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E17)

Opgave 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et inhomogent lineært ligningssystem er givet ved

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = a^2 + 10a - 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = a^2 + 3$$

1. Opskriv for $a = 1$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.
2. For hvilke værdier af a er talsættet

$$(x_1, x_2, x_3) = (-7, 7, -1)$$

en løsning til ligningssystemet?

restart
with(*LinearAlgebra*) :

1.1

$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$:
$B := < a^2 + 10 \cdot a - 3, a^2 + 3 >$:
$a := 1$:

$$LinearSolve(A, B) = \begin{bmatrix} 6 + \_t_3 \\ -1 + 2\,\_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige løsning: $(x_1, x_2, x_3) = (6, -1, 0) + t \cdot (1, 2, 1)$ **hvor** $t \in \mathbb{R}$

1.2

unassign('a')
$X := \langle -7, 7, -1 \rangle$:

$$H := A \cdot X = \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$solve(\{H[1] = B[1], H[2] = B[2]\}, \{a\}) = \{a = -3\}$

Kun for $a = -3$ **er** $(-7, 7, -1)$ **en løsning.**

Opgave 2

En symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Opstil det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ på fuldstændig faktoriseret form, og angiv rødderne med deres algebraiske multiplicitet.

2. Bestem en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ som opfylder

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

3. Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ som har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Betragt endvidere det 2-dimensionale underrum U i $\mathbb{R}^4$ som er givet ved

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u} \right\}.$$

Vis at enhedsvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

tilhører U, og bestem en vektor $\mathbf{v}_2$ således at sættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en ortonormal basis for U.

restart
with(*LinearAlgebra*) :

2.1

1. Opstil det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ på fuldstændig faktoriseret form, og angiv rødderne med deres algebraiske multiplicitet.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

Det karakteristiske polynomium:

$pA(\lambda) := Determinant(A - \lambda \cdot IdentityMatrix(4))$:

$pA(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$

$factor(pA(\lambda)) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$

Det karakteristiske plynomium på faktoriseret form er $(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} \cdot (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$

Rødderne er -1 og 1.
Den algebraiske multiplicitet er 2 for begge rødder, idet de er dobbeltrødder i det karakteristiske polynomium.

2.2

$$Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[-1, 2, \left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right], \left[1, 2, \left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Egenrummene er:

$$E_1 = span\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right) \text{ og } E_{-1} = span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Da matricen A er symmetrisk, så er egenrummene ortogonale, dvs. $E_1 \perp E_{-1}$.

Ved ren held så er de 2 basisvektorer i hvert af de 2 egenrum faktisk ortogonale!

Derfor skal vektorerne blot normeres. De har alle 4 samme længde, nemlig:

$$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$e_{11} := \frac{\langle -1, 0, 0, 1\rangle}{\sqrt{2}} : e_{12} := \frac{\langle 0, -1, 1, 0\rangle}{\sqrt{2}} : e_{-11} := \frac{\langle 1, 0, 0, 1\rangle}{\sqrt{2}} : e_{-12} := \frac{\langle 0, 1, 1, 0\rangle}{\sqrt{2}} :$$

Diagonalmatrix Λ:

$$\mathbf{\Lambda} := \boldsymbol{DiagonalMatrix}(\langle \mathbf{1, 1, -1, -1}\rangle) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ortogonal matrix Q:

$$\boldsymbol{Q} := \langle \boldsymbol{e_{11}} | \boldsymbol{e_{12}} | \boldsymbol{e_{-11}} | \boldsymbol{e_{-12}} \rangle = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}$$

Tjek:

$$Q \cdot \Lambda \cdot Q^{\%T} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2.3

$$v_1 := \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle :$$

$$A \cdot v_1 = -v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dvs. $v_1 \in U$, idet $f(v_1) = -v_1$.

Underrummet U er identisk med egenrummet E_{-1}!
Derfor kan v_1 suppleres med f.eks. e_{-11} fra E_{-1}.

$$v_1 . e_{-11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der laves en Gram-Schmidt ortonormalisering:
$u_2 := e_{-11} - (e_{-11} . v_1) \cdot v_1 :$

$$v_2 := \frac{u_2}{Norm(u_2, 2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sættet $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og $e_{11} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ er en basis for U .

Opgave 3

I vektorrummet $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ af uendeligt mange gange differentiable komplekse funktioner af en reel variabel er et 4-dimensionalt underrum U givet ved sin basis:

$$a = \left(\cos(t), \sin(t), e^t \cos(t), e^{(1+i)\cdot t}\right) .$$

En lineær afbildning $f : U \to U$ er givet ved forskriften

$$f(x(t)) = x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) .$$

1. Vis at de to basisvektorer $e^t \cos(t)$ og $e^{(1+i)\cdot t}$ tilhører kernen for f.
2. Bestem afbildningsmatricen ${}_a\mathbf{F}_a$ for f.
3. Bestem koordinatvektoren for funktionen $5\cos(t)$ med hensyn til basis a, og benyt ${}_a\mathbf{F}_a$ ved løsning af ligningen
$$f(x(t)) = 5\cos(t) .$$

restart
with(*LinearAlgebra*) :

3.1

$f := x \rightarrow diff(x, t, t) - 2 \cdot diff(x, t) + 2 \cdot x :$

$$f(x(t)) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) - 2 \frac{d}{dt} x(t) + 2\, x(t)$$

$$f\left(e^t \cdot \cos(t)\right) = 0$$

$$f\left(e^{(1+I)\cdot t}\right) = 0$$

Dvs. både $e^t \cdot \cos(t)$ og $e^{(1+i)\cdot t}$ ligger i kernen for f , da de afbildes i 0.

3.2

$f(\cos(t)) = = \cos(t) + 2 \sin(t)$

Dvs. $1 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t) + 0 \cdot e^t \cdot \cos(t) + 0 \cdot e^{(1+i)\cdot t}$

$f(\sin(t)) = \sin(t) - 2\cos(t)$

Dvs. $-2 \cdot \cos(t) + 1 \cdot \sin(t) + 0 \cdot e^t \cdot \cos(t) + 0 \cdot e^{(1+i)\cdot t}$

De 2 andre basisvektorer ligger i kernen for f i følge (3.1).

Afbildningsmatricen i a-koordinater er så:

$$aFa := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

3.3

$5 \cdot \cos(t)$ hedder i a-basis: $(5, 0, 0, 0)$.

Differentialligningssystemet kan så løse ved at løse et ligningssystem:

$$LinearSolve(aFa, \langle 5, 0, 0, 0 \rangle, free = c) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Tjek:
$(1, -2, 0, 0)$ er en partikulær løsning?

$f(1 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t)) = 5 \cos(t)$

eller

$$aFa.\langle 1, -2, 0, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OK!

Den fuldstændige løsning er vektorform: $(1, -2, 0, 0) + c_1 \cdot (0, 0, 1, 0) + c_2 \cdot (0, 0, 0, 1)$

eller på funktionsform:

$x(t) = \cos(t) - 2 \cdot \sin(t) + c_1 \cdot e^t \cdot \cos(t) + c_2 \cdot e^{(1+i) \cdot t}$ **hvor** $c_1 \in \mathbb{R}$ **og** $c_2 \in \mathbb{R}$.

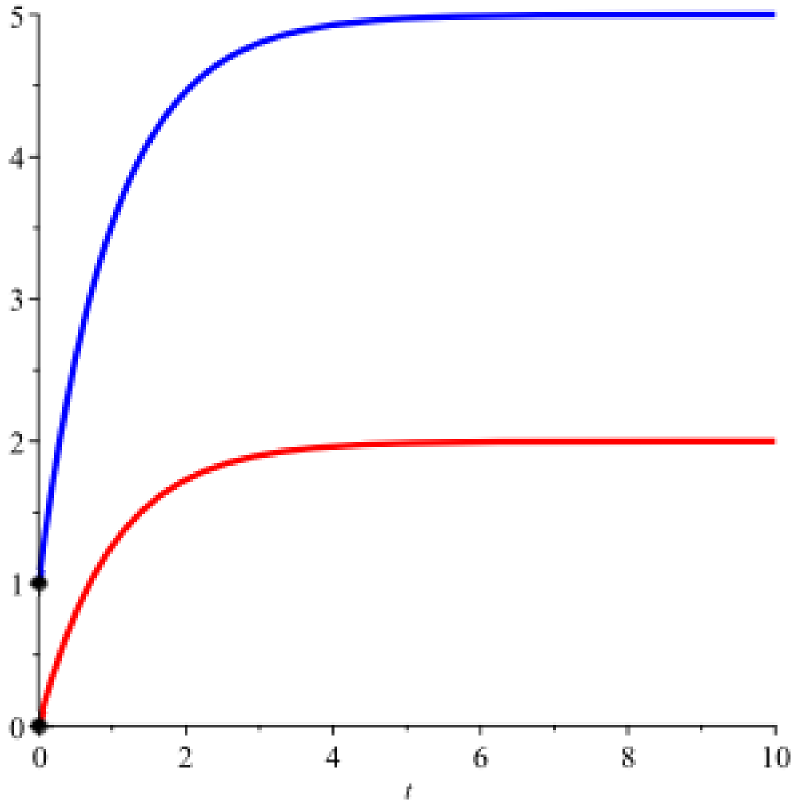
Opgave 4

Et lineært 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem ved hjælp af egenværdier og egenvektorer for systemmatricen den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

2. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som er illustreret på figuren, hvor grafen for $x_1(t)$ er blå og grafen for $x_2(t)$ rød. Forklar udfra de fundne forskrifter for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ hvorfor $x_1(t)$ går mod 5 og $x_2(t)$ mod 2, når t går mod uendelig.



3. Angiv en anden ikke konstant løsning til differentialligningssystemet som også opfylder at $x_1(t)$ går mod 5 og $x_2(t)$ mod 2, når t går mod uendelig.

restart
with(*LinearAlgebra*) :

4.1

1. Bestem ved hjælp af egenværdier og egenvektorer for systemmatricen den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

Systemmatricen:

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}:$$

$$E := Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[-1, 1, \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[0, 1, \left\{\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Der er 2 egenværdier, nemlig 0 og -1.
Begge har multiplicitet 1 (både algebraisk og geometrisk).

$$\lambda_1 := E[1, 1] = -1$$

$$\lambda_2 := E[2, 1] = 0$$

$$v_1 := E[1, 3, 1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := E[2, 3, 1] = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da der er 2 forskellige rødder, er den fuldstændige løsning er så givet ved (formel 17-24 i eNoterne):

$$c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 2\, c_1\, e^{-t} + \frac{5\, c_2}{2} \\ c_1\, e^{-t} + c_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) := \frac{5}{2} \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t}:$$

$$x_2(t) := c_1 + c_2 \cdot e^{-t}:$$

Dvs. den fuldstændige løsning er: $x_1(t) = \frac{5}{2} \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t}$ og $x_2(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-t}$

4.2

På grafen aflæses startværdierne: $x_1(0) = 1$ og $x_2(t) = 0$.

Hermed kan de 2 konstanter c_1 og c_2 bestemmes ved at løse 2 ligninger med 2 ubekendte:

$$solve(\{x_1(0) = 1, x_2(0) = 0\}, \{c_1, c_2\}) = \{c_1 = 2, c_2 = -2\}$$

$$c_1 := 2 : c_2 := -2 :$$

$$x_1(t) = 5 - 4\, e^{-t}$$

$$x_2(t) = 2 - 2\, e^{-t}$$

Den betingede løsning til differentialligningssystemet er: $x_1(t) = 5 - 4 \cdot e^{-t}$ og $x_2(t) = 2 - 2 \cdot e^{-t}$

eller direkte med "dsolve":

restart

$dsolve(\{x_1'(t) = 4 \cdot x_1(t) - 10 \cdot x_2(t), x_2'(t) = 2 \cdot x_1(t) - 5 \cdot x_2(t), x_1(0) = 1, x_2(0) = 0\}, \{x_1(t),$

$x_2(t)\})$

$= \{x_1(t) = 5 - 4\,e^{-t}, x_2(t) = -2\,e^{-t} + 2\}$

Når $t \to \infty$ vil $e^{-t} \to 0$, derfor vil $x_1(t) \to 5$ og $x_2(t) \to 2$.

4.3

Fra den generelle løsning har vi fra (4.1):

$x_1(t) := \frac{5}{2} \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t}$:

$x_2(t) := c_1 + c_2 \cdot e^{-t}$:

Løser 2 ligninger med 2 ubekendte:
$solve\left(\left\{\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 5, \lim_{t \to \infty} x_2(t) = 2\right\}, \{c_1, c_2\}\right) = \{c_1 = 2, c_2 = c_2\}$

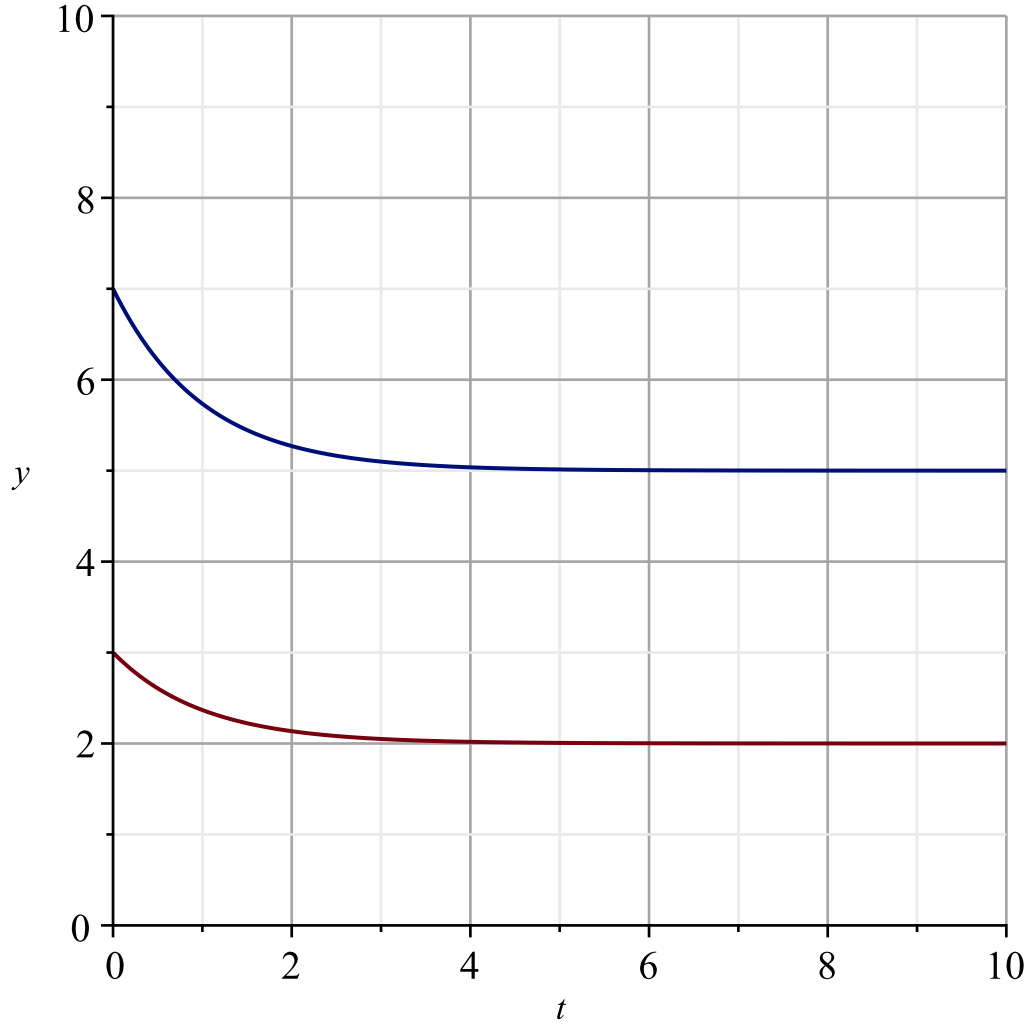
Dvs. blot $c_1 = 2$, så vil løsningen opfylde kravene. Værdien af c_2 er uden betydning.
Hvis løsningen ikke må være konstant, så skal $c_2 \neq 0$.

Eksempel kunne være: $c_1 := 2 : c_2 := 1 :$

$\mathbf{x_1(t)} = 5 + 2\,e^{-t}$

$\mathbf{x_2(t)} = 2 + e^{-t}$

Graf til illustration:
$plot(\{x_1(t), x_2(t)\}, t = 0..10, y = 0..10, gridlines)$


10
8
6
y
4
2
0
0
2
4
6
8
10
t