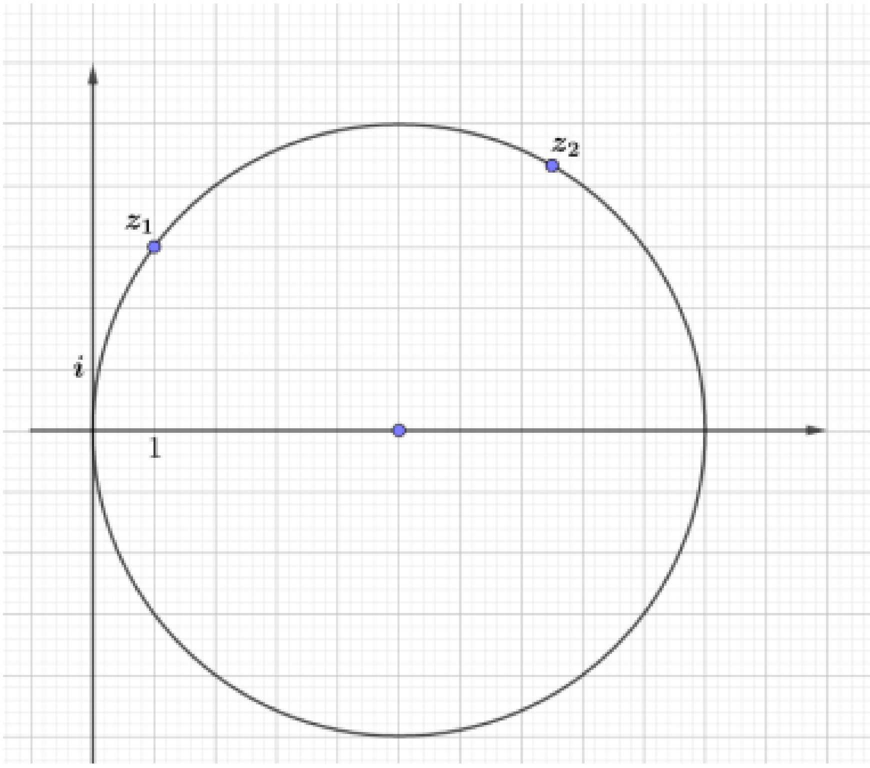
Eksamensopgave 9. december 2018, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E18)

Opgave 1

En cirkel C i den komplekse talplan er givet ved ligningen $|z-5|=5$.



1. Vis at tallet $z_1 = 1+3i$ ligger på C, og at $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{10}$.
2. Vis at tallet $z_2 = 5\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ opfylder $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{10}$.
3. Vis at ethvert tal z som opfylder $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{10}$ ligger på C.

restart

1.1

a)

$z_1 := 1 + 3 \cdot I:$

$|z_1 - 5| = 5$

Da afstanden fra cirklens centrum er 5, så ligger z_1 på cirklen C.

b)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{10}$$

Hermed er det vist, at realdelen af den reciprokke værdi af z_1 er $\frac{1}{10}$.

1.2

$$z_2 := 5\cdot\sqrt{3}\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{6}}:$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{10}$$

Hermed er det vist, at realdelen af den reciprokke værdi af z_2 er $\frac{1}{10}$.

1.3

Antag, at z opfylder at $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{10}$.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\bar{z})}{|z|^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$$

Dvs.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{10}\cdot|z|^2 \Leftrightarrow 10\cdot\mathrm{Re}(z) = |z|^2$$

Indføres, at $z = x + i\cdot y$, hvor x og y er reelle tal, så får man:

$$10\cdot\mathrm{Re}(z) = |z|^2 \Leftrightarrow 10\cdot x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 10\cdot x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 5^2$$

Dvs. $z = x + i\cdot y$ ligger på cirklen med centrum i $(5, 0) \in \mathbb{R}^2$ og radius 5. Som komplekst tal er (5, 0) jo tallet 5.
Dette er netop cirklen C givet ved $|z-5| = 5$.

Ekstra (omvendt)

Hvis z ligger på cirklen, så vil z kunne skrives som (hvor $v \in \mathbb{R}$):

$$z := 5\cdot e^{I\cdot v} + 5:$$

Årsagen er, at centrum af cirklen ligger i $c = 5$, og radius er $r = 5$.

Generel formel: $z = r\cdot e^{I\cdot v} + c$

$$\mathit{simplify}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ assuming } v :: \mathit{real}\right) = \frac{1}{10}$$

Hermed er det vist, at et punkt på cirklen har realdelen af den reciprokke værdi $= \frac{1}{10}$.

Opgave 2

Lad $\mathbf{A}$ betegne koefficentmatricen og $\mathbf{T}$ totalmatricen for et inhomogent lineært ligningssystem som har trappeformen

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Opskriv den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved at den har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^5$ og $\mathbb{R}^4$.

2. Bestem dimensionen af $\ker(f)$ og dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^5)$.

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

2.1

Ligningssystemet har 5 ubekendte og består af 4 ligninger.
Sidste søjle i $trap(T)$ er den reducerede højreside.

Der er 5 ubekendte (kaldet n), og 3 initial-ettaller i $trap(T)$.
Og der er ingen rækker i $trap(T)$ med et initial-ettal i sidste søjle.
Derfor **har** ligningssystemet løsninger, og der er 2 frie parametre.
Vælger 3. og 5. søjle til de frie parametre, dvs. $x_3 = s$ og $x_5 = t$.

Den fuldstændige løsning bliver så:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + 4\cdot s + 2\cdot t, -t, s, -5 - 3\cdot t, t)$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$

eller:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0, -5, 0) + s\cdot(4, 0, 1, 0, 0) + t\cdot(2, -1, 0, -3, 1)$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$

Tjekker med Maple:

$$trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$LinearSolve(trapT) = \begin{bmatrix} 1 + 4\_t_3 + 2\_t_5 \\ -\_t_5 \\ \_t_3 \\ -5 - 3\_t_5 \\ \_t_5 \end{bmatrix}$$

Det passer!

2.2

Når der er 2 frie parametre i løsningen af ligningssystemet i spørgsmål 2.1, så er
$dim(ker(f)) = 2$

Dimensionssætningen siger så, at billederummets dimension kan beregnes let:
$dim(ker(f)) + dim(f(\mathbb{R}^5)) = n \Leftrightarrow 2 + dim(f(\mathbb{R}^5)) = 5 \Leftrightarrow dim(f(\mathbb{R}^5)) = 3$

Opgave 3

I vektorrummet $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt er der givet vektorsættet

$$v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = ((1,1,1),(1,0,-1),(-1,1,0)) .$$

1. Gør rede for at v er en basis for $\mathbb{R}^3$.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved at der for enhver vektor $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}$ gælder

$$f(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u} ,$$

og for enhver $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ gælder

$$f(\mathbf{u}) = -4\mathbf{u} .$$

2. Bestem afbildningsmatricerne ${}_v\mathbf{F}_v$ og ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til basen v, henholdsvis standardbasen e for $\mathbb{R}^3$.

3. Find en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for f, som opfylder at én af basisvektorerne er ensrettet med $\mathbf{v}_3$.

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

$v_1 := \langle 1, 1, 1 \rangle : v_2 := \langle 1, 0, -1 \rangle : v_3 := \langle -1, 1, 0 \rangle :$

Danner en 3 x 3 matrix med vektorerne som søjler:

$$V := \langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Rank(V) = 3$

Vektorrummmet $\mathbb{R}^3$ er 3. dimensionelt, og v-vektorsættet er lineært uafhængigt, da rangen af V som vist er 3.
Men så er v-vektorsættet en basis for $\mathbb{R}^5$.

3.2

Afbildningsmatricen *vFv* i v-basis kan direkte opskrives ud fra oplysningerne i teksten!
Afbildningsmatricen *vFv* i v-basis er en diagonalmatrix med egenværdierne 5, -4 og -4.

$$vFv := DiagonalMatrix([5, -4, -4]) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Basiskifte-matricen *eMv* består af v-vektorerne udtrykt i e-basis, opskrevet som søjler. Det er faktisk matrix V i spørgsmål 3.1!

$$eMv := V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Afbildningsmatricen *eFe* i e-basis kan beregnes:

$$eFe := eMv \cdot vFv \cdot eMv^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Konklusion: de 2 afbildningsmatricer er bestemt til:

$$eFe = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } vFv = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3.3

I følge teksten i opgaven, så er v-basen en basis bestående af egenvektorer.
Egenrummene er: $E_5 = span\{v_1\}$ og $E_{-4} = span\{v_2, v_3\}$.
Da afbildningmatricen er symmetrisk, så vil egenrummene være ortogonale!
Så kan en ortonormal basis bestemmes på følgende måde - ved at arbejde med hvert egenrum for sig:

***E_5* :**

v_1 skal blot have længde 1.

$$u_1 := Normalize(v_1, 2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

***E_{-4}* :**

Udfører en Gram-Scmidt ortonormalisering, hvor man sørger for, at v_3 står først!
På den måde sikres det at første ortonormale basis er en enhedsvektor parallel med v_3.

$$G := GramSchmidt([v_3, v_2], normalized) = \left[\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \right]$$

De 2 ortonormale basisvektorer er:

$$u_3 := G[1] = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := G[2] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

Konklusion: den søgte ortonormale basis består af de ovenfor fundne vektorer u_1, u_2 og u_3:

Nye basis er $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Tjek af kravene

$$B := \langle u_1 | u_2 | u_3 \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$IsOrthogonal(B) = true$

Dvs. basen er **ortonormal**.

$$v_3 \times u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. u_3 i den nye basis er **parallel med** v_3.

$$\sqrt{2} \cdot u_3 = v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. u_3 og v_3 er **ensrettede**!

Opgave 4

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et lineært 1. ordens differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3-a \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Gør rede for at når $a = 3$, kan ligningssystemet ikke løses ved diagonaliseringsmetoden.

2. For en anden værdi af a er

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{(4+i)t} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)e^{(4+i)t} \\ e^{(4+i)t} \end{bmatrix}$$

en partikulær løsning til differentialligningssystemet. Opstil for denne værdi af a den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet.

3. Bestem den værdi af a som har været benyttet i spørgsmål 2.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

4.1

System-matricen $A(a)$ for differentialligningssystemet er:

$$A(a) := \begin{bmatrix} a & 3-a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}:$$

Hvis $a = 3$ er system-matricen:

$$A(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rødderne i det karakteristiske polynomiet er:

$solve(Determinant(A(3) - \lambda \cdot IdentityMatrix(2)) = 0, \lambda) = 3, 3$

Ikke så overraskende er 3 en dobbeltrod. Følger direkte af $A(3)$, som er en nedre trekantsmatrix med 3 og 3 i diagonalen.

$$Eigenvectors(A(3), output = list) = \left[\left[3, 2, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Der er således kun én egenvektor. $gm(3) = 1$ mens $am(3) = 2$.
Så kan matricen $A(3)$ ikke diagonaliseres, og dermed kan differentialligningssystemet ikke løses ud fra 2 egenvektorer.
Man skal anvende metode 17.7 i eNoterne til at bestemme den fuldstændige løsning.

NB: I dette spørgsmål 4.1 skal den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet ikke bestemmes!

4.2

I følge teksten i opgaven, så er der i dette tilfælde tale om, at der er 2 komplekse rødder i det karakteristiske polynomium.
Rødderne er komplekst konjugerede, og det samme er egenvektorerne.
Den ene rod kan aflæses til:

$\lambda_1 := 4 + I:$

Den tilhørende egenvektor kan aflæses til:

$$v := \langle 1 + I, 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 + I \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet bestemmes så med sætning 17.2 i eNoterne:

$$x(t) := c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v + c_2 \cdot e^{\overline{\lambda_1} \cdot t} \cdot \overline{v} :$$

$x(t) =$

$$\begin{bmatrix} (1+\mathrm{I})\, c_1\, \mathrm{e}^{(4+\mathrm{I})\,t} + (1-\mathrm{I})\, c_2\, \mathrm{e}^{(4-\mathrm{I})\,t} \\ c_1\, \mathrm{e}^{(4+\mathrm{I})\,t} + c_2\, \mathrm{e}^{(4-\mathrm{I})\,t} \end{bmatrix}$$

Konklusion: den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet er
$x_1(t) = c_1 \cdot (1+i) \cdot \mathrm{e}^{(4+i)\cdot t} + \left(c_2 \cdot (1-i) \cdot \mathrm{e}^{(4-i)\cdot t}\right.$ og $x_2(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{(4+i)\cdot t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{(4-i)\cdot t}$

NB: a er ukendt i dette spørgsmål!
NB: man skal **ikke** finde den fuldstændige reelle løsning!

4.3

Det karateristiske polynomium af $A(a)$ er:
$p_1(\lambda) := Determinant\left(A(a) - \lambda \cdot IdentityMatrix(2)\right)$:
$$p_1(\lambda) = -a\,\lambda + \lambda^2 + 4\,a - 3\,\lambda - 3$$
Egenværdien $\lambda_1 = 4 + i$ skal være en rod i p_1:
$$solve\left(p_1(\lambda_1) = 0, a\right) = 5$$

Dvs. eneste mulige værdi er: $a = 5$

alternativ:

Egenværdierne i spørgsmål 4.2 er komplekst konjugerede.
Derfor er de $4 \pm i$.

Det karateristiske polynomium må så være:
$$p_2 := (\lambda - (4 + I)) \cdot (\lambda - (4 - I)) = (\lambda - 4 - \mathrm{I})\,(\lambda - 4 + \mathrm{I})$$
$$expand(p_2) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 17$$

Skal sammenlignes med $p_1(\lambda)$, som lige skrives pænt:
$$collect\left(p_1(\lambda), \lambda\right) = \lambda^2 + (-a - 3)\,\lambda + 4\,a - 3$$

Disse 2 polynomier kan kun være ens, hvis koefficienterne er ens:
$$solve(\{-8 = -a - 3, 17 = 4 \cdot a - 3\}, a) = \{a = 5\}$$