Eksamensopgave 8. december 2019, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E19)

Opgave 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et homogent lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + a \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1. Opskriv for $a = 1$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

2. For en bestemt værdi af a har ligningssystemets koefficientmatrix rangen 2. Angiv for den værdi af a to lineært uafhængige løsninger til ligningssystemet.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

1.1

Koefficientmatricen i det homogene ligningssystem er:

$$A := \langle 1, 1, 1, 1; 2, -1, 8, -4; 1, -2, 7, a \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & a \end{bmatrix}$$

$$A_1 := subs(a = 1, A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LinearSolve(A_1, \langle 0, 0, 0 \rangle) = \begin{bmatrix} -3\_t_3 \\ 2\_t_3 \\ \_t_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konklusion: den fuldstændige løsning til det homogene ligningssystem er: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-3, 2, 1, 0)$ hvor $t \in \mathbb{R}$

Der er altså 1 fri parameter.

1.2

Udtrækker en delmatrix C af koefficientmatricen A, sletter nemlig 1. søjle, så delmatricen C er kvadratisk.
Dermed kan man anvende determinanten til hurtigt at undersøge, hvornår rangen er < 3:

$$C := A[1..3, 2..4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & -4 \\ -2 & 7 & a \end{bmatrix}$$

$Determinant(C) = 9\,a + 45$

$solve(\% = 0, a) = -5$

Så eneste mulighed for rang 2 er, at $a = -5$.

$$A_{-5} := subs(a = -5, A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$Rank(A_{-5}) = 2$

Dvs. rangen er 2 for koefficientmatricen netop når $a = -5$. OK!

$$LinearSolve(A_{-5}, \langle 0, 0, 0 \rangle) = \begin{bmatrix} -3\,\_t0_3 + \_t0_4 \\ 2\,\_t0_3 - 2\,\_t0_4 \\ \_t0_3 \\ \_t0_4 \end{bmatrix}$$

<u>eller</u> (lettere):

$$NullSpace(A_{-5}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dvs. den fuldstændige løsning er altså: $t \cdot (-3, 2, 1, 0) + s \cdot (1, -2, 0, 1)$ hvor $t, s \in \mathbb{R}$

Løsningen danner et 2 dimensionelt underrum af $\mathbb{R}^4$. Som basis har man: $(1, -2, 0, 1)$ og $(-3, 2, 1, 0)$.

En basis er som bekendt et **lineært uafhængigt** sæt af vektorer, som udspænder underrummet.

Konklusion: 2 lineært uafhængige løsninger kan være $\underline{\underline{(-3, 2, 1, 0)}}$ og $\underline{\underline{(1, -2, 0, 1)}}$

Opgave 2

Et 2-dimensionalt vektorrum V har basen $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. En lineær afbildning

$$f : V \to \mathbb{R}^3$$

har med hensyn til basen v i V og standardbasen e i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen

$${}_e\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv koordinatvektoren for vektoren

$$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2$$

med hensyn til basen v, og bestem billedvektoren $f(\mathbf{v}_3)$.

2. Løs ligningen

$$f(\mathbf{v}) = (1, 2, 10).$$

3. Bestem dimensionen af billedrummet $f(V)$ og dimensionen af $\ker(f)$.

4. Angiv (med begrundelse) en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke tilhører $f(V)$.

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

2.1

Afbildningsmatricen *eFv* er givet ved:

$$eFv := \langle 1, 2; 0, -1; 2, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektoren $v_3 = 2 \cdot v_1 - 5 \cdot v_2$ har disse koordinater i v-basis:

$$vv_3 := \langle 2, -5 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$eFv \cdot vv_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Konklusion: *v3* i v-koordinater er $\underline{\underline{(2, -5)}}$ og billedet af v_3 ved F er $\underline{\underline{(-8, 5, 4)}}$ i e- basis.

2.2

Ligningen $f(v) = (1, 2, 10)$ løses som et lineært inhomogent ligningssystem:

$$LinearSolve(eFv, \langle 1, 2, 10 \rangle) = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Konklusion: løsningen til ligningssystemet er én vektor $\underline{\underline{v = 5 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2}}$ som har koordinaterne $\underline{\underline{(5, -2)}}$ i v-basis.

2.3

Billedrummet er udspændt af søjlerne i afbildningsmatricen, dvs.
$f(V) = span\{(1, 0, 2), (2, -1, 0)\}$
Dimensionen af billedrummet er givet ved rangen af søjlerne i afbildningsmatricen:
$Rank(eFv) = 2$

Konklusion: dimensionen af billedrummet er $\underline{\underline{dim(f(V)) = 2}}$

Dimensionssætningen siger, at $dim(f(V)) + dim(ker(f)) = dim(V)$.
Derfor er $dim(ker(f)) = dim(V) - dim(f(V)) = 2 - 2 = 0$.

eller (direkte):

$NullSpace(eFv) = \varnothing$

Konklusion: dimensionen af kernen for f er $\underline{\underline{dim(ker(f)) = 0}}$

2.4

Billedrummet $f(V)$ er udspændt af 2 vektorer, nemlig søjlerne i afbildningsmatricen eFv.
Dvs. $(V) = span\{(1, 0, 2), (2, -1, 0)\}$.

En vektor som ikke ligger i billedrummet kan så findes med krydsproduktet af de 2 basisvektorer:

$$\langle 1, 0, 2\rangle \times \langle 2, -1, 0\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Konklusion: en vektor, som ikke tilhører billedrummet $f(V)$ kan være $\underline{\underline{(2, 4, -1)}}$.

NB: der er uendeligt mange, kan blot gætte og tjekke!

Opgave 3

I vektorrummet $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt er der givet tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1), \ \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1) \text{ og } \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0).$$

Om en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ oplyses at den har egenrummene $E_6 = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$ og $E_{-3} = \text{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

1. Betragt matricen $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$. Angiv en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ som opfylder identiteten
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V}.$$

2. Gør rede for at enhver vektor i E_6 er ortogonal på enhver vektor i E_{-3}.

3. Bestem en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ som opfylder identiteten
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$
hvor $\mathbf{\Lambda}$ er den i spørgsmål 1 nævnte diagonalmatrix.

$restart : with(LinearAlgebra) :$
$with(VektorAnalyse2) = [div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop]$

3.1

$$v_1 := \langle 1, -1, 1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \langle 1, 0, -1\rangle =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 := \langle 1, 1, 0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V := \langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ud fra de angiuvne egenrum $E_6 = span\{v_1\}$ og $E_{-3} = span\{v_2, v_3\}$ kan man konkludere, at matricen A kan diagonaliseres ved et basisskifte.
Den nye matrix Λ er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen.
Egenværdien svarende til egenvektoren v_1 er 6. Og egenværdien svarende til egenvektorerne v_2 og v_3 er -3, som har $am = gm = 2$.

$$\Lambda := \langle 6, 0, 0; 0, -3, 0; 0, 0, -3\rangle = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Konklusion: diagonalmatricen $\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

3.2

Man ved, at egenrummene E_6 og E_{-3} er lineært uafhængige, men her skal vises, at de faktisk er **ortogonale**.
Det er **nok** at undersøge om basisvektoren fra E_6 og basisvektorerne fra E_{-3} er ortogonale, dvs. $v_1 \perp v_2$ og $v_1 \perp v_3$.
Hertil anvendes skalarproduktet, som skal blive 0:

$$prik(v_1, v_2) = 0$$

$$prik(v_1, v_3) = 0$$

Konklusion: egenrummene E_6 og E_{-3} er ortogonale.

3.3

Den ortogonale martrix Q består af søjlevektorer, som udgør en ortonormal basis for de 2 egenrum.

E_6 er udspændt af basisvektoren v_1. Denne skal blot normeres, så den har længde 1:

$$q_1 := Normalize(v_1, 2) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

E_{-3} er udspændt af basisvektorerne v_2 og v_3. Disse køres gennem Gram-Schmidts algoritme.

NB: Algoritmens output i Maple kan variere, idet rækkefølgen ved ny kørsel kan ændres!
Ombyttes 2 søjler, så skifter determinanten fortegn.

$$G := GramSchmidt(\{v_2, v_3\}, normalized) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \right\}$$

$$q_2 := G[1] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_3 := G[2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$Q_1 := \langle q_1 | q_2 | q_3 \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

Skal tjekke, at Q er en **positiv** ortogonal matrix:

$$Determinant(Q_1) = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{6}\,\sqrt{2}}{6}$$

$$simplify(\%) = 1$$

Ombytning af 2. og 3. søjle:

$$Q_2 := \langle q_1|q_3|q_2\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$Determinant(Q_2) = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{2}}{6}$$

$$simplify(\%) = -1$$

Konklusion: den søgte **positiv** ortogonale matrix er $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$

Extra

Matricen A bestemmes (**kræves dog ikke i opgaven**):
Om man bruger Q_1 eller Q_2 er ligegyldigt. A bliver den samme!

$$A := Q_1 \cdot \Lambda \cdot Q_1^{\%T} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A := Q_2 \cdot \Lambda \cdot Q_2^{\%T} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[-3, 2, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[6, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Resultatet stemmer med de givne egenvektorer og basis for egenrum!

Opgave 4

For en given matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betragtes et lineært 1. ordens differentialligningssystem på formen

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Det oplyses at systemets fuldstændige komplekse løsning er givet ved

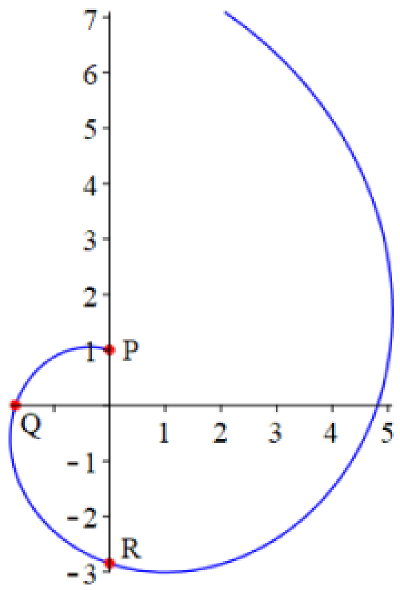
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{(2+6i)t} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{(2-6i)t} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hvor } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ og } t \in \mathbb{R}.$$

1. Find egenværdierne for $\mathbf{A}$ og de tilhørende egenrum.

2. Vis at den partikulære løsning hvor $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Betragt den partikulære løsning omtalt i forrige spørgsmål. På figuren nedenfor ses den banekurve, som punktet $(x_1(t), x_2(t))$ gennemløber i tiden $t \in [0,1]$. Punktet P er begyndelsespunktet, mens Q er det første skæringspunkt med førsteaksen, og R er det første skæringspunkt med andenaksen, se figuren.



Bestem de værdier af $t \in [0,1]$ hvor punktet $(x_1(t), x_2(t))$ passerer Q henholdsvis R.

restart

4.1

Egenværdierne for matricen A kan direkte aflæses af den fuldstændige komplekse løsning, som er angivet i opgaven.
Egenværdierne er faktorerne i eksponenten af de komplekse eksponentialfunktioner. Dvs. de komplekst komjugerede egenværdier er: $\underline{\underline{2 \pm 6 \cdot i}}$

De tilhørende egenvektorer kan også aflæses direkte. Egenrummene er så blot *span* af de givne egenvektorer:

Konklusion: egenværdien $2 + 6 \cdot i$ har egenrummet $E_{2+6 \cdot i} = span\{(i, 1)\}$, og egenværdien $2 - 6 \cdot i$ har egenrummet $E_{2-6 \cdot i} = span\{(-i, 1)\}$

NB: Egenværdierne er komplekst konjugerede, dvs. $\overline{2 + 6 \cdot i} = 2 - 6 \cdot i$. Det samme gælder egenvektorerne: $\overline{(i., 1)} = (-i, 1)$.

4.2

Den partikulære løsning med $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ er givet ved udtrykket:

$c_1 := \frac{1}{2} : c_2 := \frac{1}{2} :$

$x(t) := evalc\left(c_1 \cdot e^{(2+6 \cdot I) \cdot t} \cdot \langle I, 1 \rangle + c_2 \cdot e^{(2-6 \cdot I) \cdot t} \cdot \langle -I, 1 \rangle\right) :$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t}\sin(6t) \\ e^{2t}\cos(6t) \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konklusion: den partikulære løsning opfylder, at $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.3

I punktet Q gælder at $x_2(t) = 0$. Tidspunktet t skal så beregnes (og skal ligge i [0,1]):

$solve(\ x(t)[2] = 0, t)$ $\quad \frac{\pi}{12}$

$$x\left(\frac{\pi}{12}\right) = \begin{bmatrix} -e^{\frac{\pi}{6}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$evalf(\%) = \begin{bmatrix} -1.688091795 \\ 0. \end{bmatrix}$$

I punktet R gælder at $x_1(t) = 0$. Tidspunktet t skal så beregnes (og skal ligge i [0,1]):

$solve(\ x(t)[1] = 0, t, AllSolutions)$ $\quad \frac{\pi\_Z1\sim}{6}$

NB: parameteren *AllSolutions* er nødvendig, ellers giver Maple svaret 0!

Vælger parametren $\_Z1\sim = 1$.
NB: værdien $\_Z1\sim = 0$ giver startpunktet P.

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix}$$

$$evalf(\%) = \begin{bmatrix} 0. \\ -2.849653908 \end{bmatrix}$$

Konklusion: banekurven gennemløber punktet Q til tiden $\underline{\underline{t = \frac{\pi}{12}}}$ og punktet R til tiden $\underline{\underline{t = \frac{\pi}{6}}}$

Extra

Banekurven tegnes sammen med de 3 punkter**:**

```
with(plots) :
X := plot([x(t)[1], x(t)[2], t = 0..1], color = red, scaling = constrained, labels = ['x_1(t)','x_2(t)'], legend='banekurve') :
PP := pointplot([x(0)], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = blue, legend='P') :
QQ := pointplot([x(π/12)], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = green, legend='Q
```

') :

$RR := pointplot\left(\left[x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = gold, legend = 'R'\right)$:

$display(X, PP, QQ, RR)$