E20 eksamen, Matematik 1, DTU

Ny type eksamen, idet den afvikles online hjemme pga. corona-krisen.

Opgave 1 og 2 afleveres i Maple TA/Möbius. Spørgsmålene kan være tvistet!
Opgave 3 skal skrive som et essay, hvor beregningerne placeres i et bilag. Uploades som én PDF-fil.

Opgave 1 (Maple TA/Möbius)

Lad a og b være reelle konstanter. Et inhomogent lineært ligningssystem har totalmatricen $\mathbf{T}$ givet ved

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & a-1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

restart
with(*LinearAlgebra*) :

$T(a, b) := \langle 1, -3, 5, 5; 0, a-1, 2, 5; 0, 0, a+1, b; 0, 0, 0, a^2-1 \rangle :$

$$T(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & a-1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

NB: Matricen T er en øvre diagonalmatrix!
a og b er reelle tal.

1)

Bestem for $a = -1$ og $b = 0$ en af løsningerne $\mathbf{x}_0$ til ligningssystemet.

$$T(-1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$LinearSolve(T(-1, 0)) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} - 2\_t_3 \\ -\frac{5}{2} + \_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix}$$

Dvs. d**en fuldstændige løsning** er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

En af løsningerne kan så være: $\boldsymbol{x_0} := \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

2)

Konstanternes værdier er uforandret $a = -1$ og $b = 0$. Angiv en vektor **w** som udspænder løsningsrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem.

I følge beregningerne fra (1.1), så kan løsningsrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem udspændes af:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3)

Antag $a = 1$. For hvilken værdi af b har ligningssystemet løsninger?

$$T(1, b) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis $b = 5$, så vil række 2 og 3 i T være ens, så der er løsning.

$$LinearSolve(T(1, 5)) = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} + 3\_t0_2 \\ \_t0_2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Hvis $b \neq 5$, så vil række 2 og 3 i T betyde, at der ikke er løsning.

Konklusion: der er løsninger, hvis $\boldsymbol{b = 5}$.

4)

Vi betragter nu ligningssystemet med værdierne for a og b som i forrige spørgsmål. Vektorerne $(\alpha, 0, \beta)$ og $(\gamma, 1, \delta)$ er løsninger til det inhomogene system. Angiv værdierne af α, β, γ og δ.

PROBLEM:
Hvad betyder "forrige"? Er det (1.3) eller (1.2)?
Ordet "forrige" er tvetydigt!
Se: https://sproget.dk/raad-og-regler/artikler-mv/svarbase/SV00000083

Hvis "forrige" er (1.2) - regnet på en måde

Her er $a = -1$ og $b = 0$!

$$T(-1,0) = = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatricen:

$$A := T(-1,0)[1..4, 1..3] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Højre siden:

$$B := T(-1,0)[1..4, 4..4] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krav:

$$A.\langle \alpha, 0, \beta \rangle = B = \begin{bmatrix} \alpha + 5\,\beta \\ 2\,\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$solve(\{\alpha + 5\cdot\beta = 5, 2\cdot\beta = 5\}) = \left\{\alpha = -\frac{15}{2}, \beta = \frac{5}{2}\right\}$$

$$A.\langle \gamma 2, 1, \delta \rangle = B = \begin{bmatrix} \gamma 2 - 3 + 5\,\delta \\ -2 + 2\,\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$solve(\{\gamma 2 - 3 + 5\cdot\delta = 5, -2 + 2\cdot\delta = 5\}) =$$

$$\left\{\delta = \frac{7}{2}, \gamma 2 = -\frac{19}{2}\right\}$$

PROBLEM:
NB: γ kaldes γ2 for at Maple kan løse det!
Se på: https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=initialconstants
at γ er en kendt konstant (Eulers konstant): $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-\ln(n)\right)$
Det er ikke så smart, at kalde konstanten γ, da det er ukendt for 1. års studerende!

Konklusion: $\boldsymbol{\alpha = -\frac{15}{2}, \beta = \frac{5}{2}, \gamma = -\frac{19}{2}, \delta = \frac{7}{2}}$

Tjek

$$L := LinearSolve(T(-1,0)) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} - 2\_t1_3 \\ -\frac{5}{2} + \_t1_3 \\ \_t1_3 \end{bmatrix}$$

Hvis $(\alpha, 0, \beta)$ skal passe, så må $t = \frac{5}{2}$:

$$solve(L[2]=0) = \frac{5}{2}$$

$$\alpha = -\frac{5}{2} - 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = \alpha = -\frac{15}{2}$$

Hvis $(\gamma, 1, \delta)$ skal passe, så må $t = \frac{7}{2}$:

$$solve(L[2]=1) = \frac{7}{2}$$

$$\gamma = -\frac{5}{2} - 2\cdot\left(\frac{7}{2}\right) = \gamma = -\frac{19}{2}$$

Hvis "forrige" er (1.3) - regnet på en anden måde

NB: Hvis man ikke har regnet (1.3), så kan man ikke løse (1.4)!

Her er $a = 1$ og $b = 5$!

$$T(1,5) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$LinearSolve(T(1,5)) =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{2}+3\ \_t2_2 \\ \_t2_2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen er: $\begin{bmatrix} -\frac{15}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ hvor $t \in \mathbb{R}$.

Hvis $(\alpha, 0, \beta)$ skal passe, så må $t = 0$. **Hermed ser man at** $\boldsymbol{\alpha = -\frac{15}{2}}$ **og** $\boldsymbol{\beta = \frac{5}{2}}$

Hvis $(\gamma, 1, \delta)$ skal passe, så må $t = 1$. **Hermed ser man, at** $\boldsymbol{\gamma = -\frac{9}{2}}$ **og** $\boldsymbol{\delta = \frac{5}{2}}$

$\gamma = -\frac{15}{2} + 1 \cdot 3 = \gamma = -\frac{9}{2}$

5)

Undersøg om der findes værdier af a og b for hvilket ligningssystemet har netop én løsning.

T er en 4 x 4 matrix. Derfor kan man bestemme determinanten af T.
$Determinant(T(a, b)) = (a-1)\,(a+1)\,(a^2-1)$

Det ses umiddelbart, at determinanten er 0, netop når $a = \pm 1$. Så kan rangen af totalmatricen højest være 3.
Derfor kan der kun være løsning, hvis $a = \pm 1$.
De 2 værdier af a må undersøges nærmere.

Antag at a = 1

$$T(1, b) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis $b \neq 5$, så er der klart ikke nogen løsning (se på række 2 og 3).

$$LinearSolve(T(1, 5)) = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2}+3\ \_t3_2 \\ \_t3_2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Der er altså **uendelig mange** løsninger når $b = 5$, og ingen løsning, når $b \neq 5$.

Antag at $\boldsymbol{a=-1}$

$$T(-1,b)=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5 & 5\\ 0 & -2 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Hvis $b\neq 0$, så er der klart ikke nogen løsning (se på række 3).

$$\mathit{LinearSolve}(T(-1,0))=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}-2\,\_t4_3\\ -\frac{5}{2}+\_t4_3\\ \_t4_3\end{bmatrix}$$

Der er altså **uendelig mange** løsninger når $b=0$, og ingen løsning når $b\neq 0$

Konklusion: der findes ingen værider af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, hvor ligningssystemet har netop én løsning.

Opgave 2 (Maple TA/Möbius)

En første ordens inhomogen lineær differentialligning er givet ved:

$$x'(t)+3x(t)=e^{3t}\cos(t).$$

restart

1)

Det oplyses differentialligningen har en partikulær løsning på formen

$$x_p(t)=a\cdot e^{3t}\cos(t)+b\cdot e^{3t}\sin(t)\text{ hvor }a,b\in\mathbb{R}.$$

Bestem a og b.

$f(X):=\mathit{diff}(X,t)+3\cdot X:$

$x_p(t):=a\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)+b\cdot e^{3\cdot t}\cdot\sin(t):$

$f(x_p(t))=6\,a\,e^{3\,t}\cos(t)-a\,e^{3\,t}\sin(t)+6\,b\,e^{3\,t}\sin(t)+b\,e^{3\,t}\cos(t)$

$\mathit{collect}(\%,\{\cos(t),\sin(t),e^{3\cdot t}\})=(6\,a+b)\,e^{3\,t}\cos(t)+(-a+6\,b)\sin(t)\,e^{3\,t}$

Udtrykket sammenligninges med højresiden $e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)$. Derfor opstilles 2 ligninger:

$\mathit{solve}(\{6\cdot a+b=1,-a+6\cdot b=0\})=\left\{a=\frac{6}{37},b=\frac{1}{37}\right\}$

Konklusion: $\boldsymbol{a=\frac{6}{37},b=\frac{1}{37}}$

2)

Bestem en løsning $x_h(t)$ til den tilsvarende homogene differentialligning. Vi betinger yderligere at $x_h(t)$ ikke må være nulløsningen.

$\mathit{dsolve}(f(x(t))=0)=x(t)=\_C1\,e^{-3\,t}$

Den **fuldstændige løsning** er: $x(t) = c \cdot e^{-3 \cdot t}$.

Konklusion: en mulig løsning til den homogen differentialligning er f.eks. $\underline{\underline{x_h(t) = e^{-3 \cdot t}}}$ hvor $c \in \mathbb{R}$.

3)

Fra de foregående spørgsmål har vi $x_h(t)$ og $x_p(t)$. Hvilke af følgende tre funktioner er løsning til den inhomogene differentialligning

$$4 \cdot x_h(t) + x_p(t)\,,\ x_h(t)\,,\ x_h(t) + 3 \cdot x_p(t)\,.$$

Der gælder, at kun $\underline{\underline{\mathbf{4 \cdot x_h(t) + x_p(t)}}}$ **er en løsning til den inhomogene differentialligning.**

$x_h(t)$ er kun løsning til den homogene differentialligning, og dermed ikke den inhomogene differentialligning.
$x_h(t) + 3 \cdot x_p(t)$ er løsning til en NY inhomogen differentialligning, hvor højresiden er $3 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \cos(t)$!

NB: den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning er:

$$dsolve\left(f(x(t)) = e^{3 \cdot t} \cdot \cos(t)\right) = x(t) = \left(\frac{6\cos(t)\, e^{6t}}{37} + \frac{\sin(t)\, e^{6t}}{37} + \_C1\right) e^{-3t}$$

4)

Begrund dine svar i forrige spørgsmål ved brug af struktursætningen.

En homogen + en inhomogen løsning er igen løsning til den inhomogene differentialligning.
Det følger direkte af struktursætningen.

Om en homogen andenordens lineær differentialligning oplyses at dens fuldstændige løsning er givet ved:

$$x(t) = k_1 \cdot e^{-5t}\cos(3t) + k_2 \cdot e^{-5t}\sin(3t) \quad (*)\,.$$

5)

Bestem en af rødderne λ i den til differentialligningen hørende karakterligning.

Rødderne er komplekst konjugerede, når løsningen har den form!
Rødderne kan direkte aflæses: $\mathbf{-5 \pm i \cdot 3}$, så en af rødderne kan f.eks. være $\underline{\underline{5 + i \cdot 3}}$

6)

Bestem k_1 og k_2 således at løsningen $(*)$ opfylder $x(0) = 4$ og $x'(0) = 5$.

Differentialligningen kan opskrives via det karakter-polynonomiet, idet faktoriseringen er:

$$expand\left((\lambda - (-5 + I \cdot 3)) \cdot (\lambda - (-5 - I \cdot 3))\right) = \lambda^2 + 10\,\lambda + 34$$

Differentialligningen lyder så: $x''(t) + 10 \cdot x'(t) + 34 \cdot x(t) = 0$
Højresiden er 0, da differentialligningen er homogen.

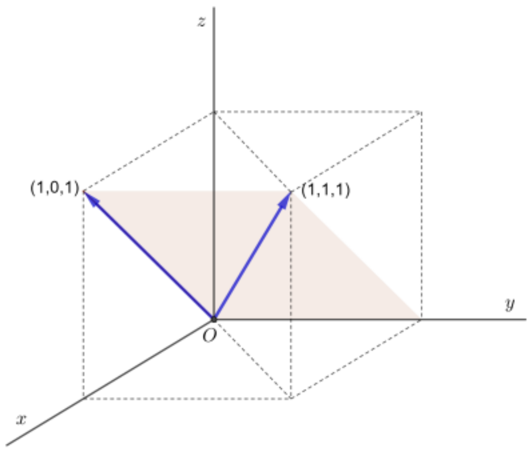
$$dsolve(\{x''(t) + 10 \cdot x'(t) + 34 \cdot x(t) = 0, x(0) = 4, x'(0) = 5\}) =$$

$x(t) = \frac{25\,e^{-5t}\sin(3\,t)}{3} + 4\,e^{-5t}\cos(3\,t)$

Sammenlignet med den give løsning, kan man direkte aflæse, at:

$\mathbf{k_1 = 4}$ **og** $\mathbf{k_2 = \frac{25}{3}}$

Opgave 3 (essay)



Et underrum U i $\mathbb{R}^3$ er udspændt af vektorerne $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$ og $\mathbf{u}_2 = (1,1,1)$. Det oplyses desuden at U er kernen for en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

1)

Gør rede for at $\dim(U) = 2$, og bestem en ortonormal basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ for U.

Skal vise, at de 2 vektorer er lineært uafhængige.
Vektorerne indsættes som søjler i en 3 x 2 matrix. Rangen af denne er 2.
Derfor er u_1 og u_2 lineært uafhængige.
Da $U = span\{u_1, u_2\}$, så er $dim(U) = 2$

u_1 og u_2 udgør en basis for U. En ortonormal basis bestemmes med Gram-Schmidts metode.

En ortonormal basis er bestemt til: $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2)

Gør rede for at tallet 0 er en egenværdi for f, og bestem $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ og $f(2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

I teksten er der skrevet, at kernen $ker(f) = U$. Og fra (1) vides, at $dim(U) = 2$, derfor er 0 en egenværdi og egenrummet $E_0 = U$.

Beregning af 2 funktionsværdier:
$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0$, da $kerf(f) = U$. Dvs. $\underline{\underline{f(u_1 + u_2) = 0}}$

NB: Første lighedstegn gælder, da f er en lineær afbildning.

$f(2 \cdot v_1 - v_2) = 2 \cdot f(v_1) - f(v_2) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$. Dvs. $\underline{\underline{f(2 \cdot v_1 - v_2) = 0}}$

NB: Lighedstegn gælder, da f er en lineær afbildning.
Det andet lighedstegn gælder, da $v_1 \in U$ og $v_2 \in U$, altså kernen for f.

3)

Det oplyses nu yderligere at f har egenværdien 4 og at E_4 er det ortogonale komplement til U. Bestem en diagonalmatrix Λ og en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

Det vides, at f har 2 egenværdier, nemlig 0 og 4.
Egenrummet $E_0 = ker(f) = U$ er 2-dimensionelt.
Egenrummet E_4 må så have dimensionen 1.
Det følger af, at $\mathbb{R}^3$ er 3-dimensionelt, og

$dim(U) + dim(U^{\perp}) = dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow dim(E_0) + dim(E_4) = 3 \Leftrightarrow 2 + dim(E_4) = 3 \Leftrightarrow dim(E_4) = 3 - 2 = 1$

Nu kan en basisvektor v_3 for E_4 beregnes ved krydsproduktet af 2 vektorer fra U.

$$u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektoren normeres til længde 1: $v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

Nu har man de 3 ortonormale egenvektorer: v_1, v_2 og v_3.

Diagonalmatrix: $\underline{\underline{\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}}$

Ortogonal matrix består af de 3 v-vektorer som søjler:

$$Q = \langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Hermed bliver afbildningsmatricen: $eFe = Q \cdot \Delta \cdot Q^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4)

Bestem afbildningsmatricen ${}_e\mathbf{G}_e$ for en anden lineær afbildning $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ som også har U som kerne, og som opfylder at $(1,2,3) \in g(\mathbb{R}^3)$.

$\langle 1, 2, 3 \rangle$ kaldes vektor w.
Der må være en egenværdi mere end 0!
Vælger egenværdien 4 som før (for den sidste egenværdi). Hermed den samme diagonalmatrix.
NB: Kunne vælge en vilkårlig anden egenværdi bortset fra 0.

$$\Lambda_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vælger at w ligger i egenrummet E_4, dvs. w er en egenvektor svarende til egenværdien 4.
NB: Kunne vælge en vilkårlig anden vektor som egenvektor, nå blot denne vektor ikke ligger i U.

Ny basis b for $\mathbb{R}^3$ bestående af v_1, v_2 og w.
Koordinatskiftematrix: $eMb = \langle v_1 | v_2 | w \rangle$
Så beregnes afbildningsmatricen eGe som $eMb \cdot \Lambda_g \cdot eMb^{-1}$

Hermed fås **afbildningsmatricen**: $eGe = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Tjekker med Maple, at $g(v_1) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ og $g(v_2) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ samt at $g(w) = 4 \cdot w$
Derfor vil v_1 og v_2 stadigvæk være en basis for U, og $\langle 1, 2, 3 \rangle \in g(\mathbb{R}^3)$. Husk her, at $g(\mathbb{R}^3)$ er et underrum, så når $4 \cdot w$ ligger der, så gør w også!

BILAG til essay (beregninger i Maple)

$restart:$

$with(LinearAlgebra):$

1)

$u_1 := \langle 1, 0, 1 \rangle : u_2 := \langle 1, 1, 1 \rangle :$

$$M := \langle u_1 | u_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$Rank(M) = 2$

eller:

$$ReducedRowEchelonForm(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G := GramSchmidt([u_1, u_2], normalized) = \left[\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$v_1 := G[1] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$v_2 := G[2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2)

3)

$$v_3 := u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 := Normalize(v_3, 2) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda := DiagonalMatrix(\langle 0, 0, 4 \rangle) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q := \langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$eFe := Q \cdot \Delta \cdot Q^{\%T} = `.`\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \Delta, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right)$$

4)

$w := \langle 1, 2, 3 \rangle :$

$$\Lambda_g := DiagonalMatrix(\langle 0, 0, 4 \rangle) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$eMb := \langle v_1 | v_2 | w \rangle = = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$eGe := eMb \cdot \Lambda_g \cdot eMb^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Tjek:

$eGe \cdot v_1 =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$eGe \bullet v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$eGe \bullet w = \ = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$4 \cdot w = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$