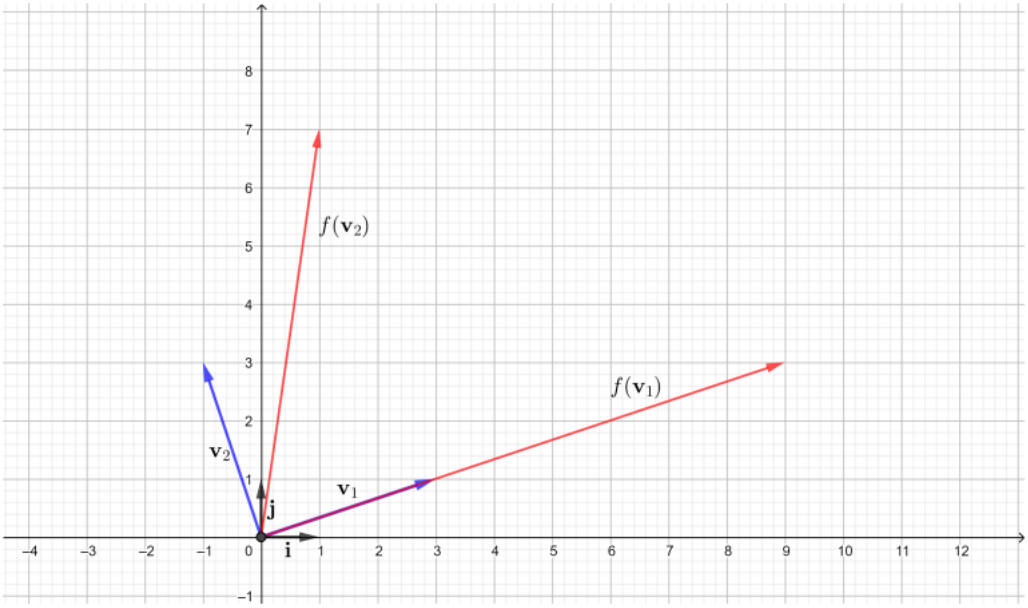
Eksamen Matematik 1 E21 essay delen (1 time)

Opgaverne tager udgangspunkt i den udgave, som kan findes på Matematik 1 hjemmesiden.

De enkelte spørgsmål er klippet ud, og løst effektivt med Maple 2021.2.

ESSAY

I planen er givet et sædvanligt retvinklet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem. Vi betragter vektorrummet $G2$ af geometriske vektorer i planen afsat ud fra origo O. To vektorer $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ og $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ danner en basis $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ for $G2$. Vi betragter en lineær afbildning $f : G2 \to G2$ der er givet ved billederne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$ som vises på figuren (NB: koordinaterne for alle de viste vektorer er heltallige).



1)

Gør rede for at $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor for f, mens $\mathbf{v}_2$ ikke er det.

$v_1 = \langle 3, 1 \rangle$ og $f(v_1) = \langle 9, 3 \rangle$. Da de 2 vektorer er proportionale med faktor 3, er v_1 en egenvektor svarende til egenværdien 3.

$v_2 = \langle -1, 3 \rangle$ og $f(v_2) = \langle 1, 7 \rangle$. Da de 2 vektorer **ikke** er proportionale, så er v_2 **ikke** en egenvektor.

2)

Billederne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$ kan skrives som linearkombinationer af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ således:

$$f(\mathbf{v}_1) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \text{ og } f(\mathbf{v}_2) = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 .$$

Find tallene a, b, c og d og opstil afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for f med hensyn til basen v.
Bestem koordinatvektoren ${}_v f(\mathbf{v1} + \mathbf{v2})$.

Direkte fra 1):
$f(v_1) = 3 \cdot v_1$ dvs. $\underline{\underline{a = 3}}$ og $\underline{\underline{b = 0}}$

Vedr. v_2 løses et lineært ligningssystem: $c \cdot v_1 + d \cdot v_2 = f(v_2)$. Det giver: $\underline{\underline{c = 1}}$ og $\underline{\underline{d = 2}}$

Afbildningsmatricen vFv kan så opstilles:

$$vFv = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ganges vektoren $v_1 + v_2$ på afbildningsnmatricen vFv får man billedet af $v_1 + v_2$.

NB: $v_1 + v_2$ skal være i v-koordinater! Det er <1,1>.

Det giver vektoren $vf\left(v_1 + v_2\right) = \langle 4, 2 \rangle$ i v-koordinater.

3)

Lad A, B og C betegne endepunkterne af $\mathbf{v}_1$ henholdsvis $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_2$.
a) Bestem arealet af det parallogram som har hjørnerne O, A, B og C.
b) Bestem arealet af det parallelogram som har hjørnerne O, $f(A)$, $f(B)$ og $f(C)$.

a)

Hjørnerne er givet ved:
$O = \langle 0, 0 \rangle$, $A = \langle 3, 1 \rangle$, $B = \langle 2, 4 \rangle$ og $C = \langle -1, 3 \rangle$

Arealet af parallelogrammet OABC kan bestemmes.

Der er tale om et kvadrat i følge figuren ovenfor, idet OA og OC har længden $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ og $v_1 \perp v_2$.

Derfor er arealet af OABC $= \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \underline{\underline{10}}$

b)

Hjørnerne er givet ved:
$O = \langle 0, 0 \rangle$, $f(A) = \langle 9, 3 \rangle$, $f(B) = 4 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = \langle 10, 10 \rangle$ og $f(C) = \langle 1, 7 \rangle$.

Nu er der tale om et ægte parallelogram - udspændt af de 2 vektorer $f\left(v_1\right)$ og $f\left(v_2\right)$, som udgør de 2 røde vektorer på figuren ovenfor.

Arealet er så givet ved den numeriske værdi af determinanten af de 2 vektorer. De 2 vektorer er kendt fra spøgsmål 1.

Altså $\left| < f\left(v_1\right) | f\left(v_2\right) > \right| = \left| determinant\left(\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right| = |9 \cdot 7 - 3 \cdot 1| = |63 - 3| = \underline{\underline{60}}$

4)

Bestem afbildningsmatricen ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til basen $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Basisskiftematricen eMv er givet ved en matrix, hvor søjlerne er v_1 og v_2. Dvs. $eMv = \langle v_1 | v_2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Afbildningsmatricen i standardbasis kan så bestemmes som

$$eFe = eMv \bullet vFv \bullet vMe = eMv \bullet vFv \bullet eMv^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

5)

Bestem en ny basis for $G2$ med hensyn til hvilken afbildningsmatricen for f bliver en diagonalmatrix.

Bestemmer egenvektorer for afbildningen.
$\langle -2, 1\rangle$ er egenvektor svarende til egenværdien 2, og $\langle 3, 1\rangle$ er egenvektor svarende til egenværdien 3.
Egenrummene er ortogonale, derfor skal de 2 egenvektorer blot normeres til længde 1.

Giver vektorerne $u_1 = \left\langle -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$ og $u_2 = \left\langle \frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$. De udgør en **ortonormal** basis.
Man kan også svare med $\langle -2, 1\rangle$ og $\langle 3, 1\rangle$. Så er der kun tale om en **ortogonal** basis.

I u-basis bliver afbildningsmatricen en diagonalmatrix (med egenværdierne i diagonalen:

$$uFu = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6)

Hvis vi nu ændrer f således at $f(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{v}_1$, hvor $k \in \mathbb{R}$, og $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2$, findes der så værdier af k således at f ikke er diagonaliserbar?

I disse tilfælde bliver afbildningsmatricen:

$$vFv = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne er 7 og k.
For alle værdier af $k \in \mathbb{R}\backslash\{7\}$ er f diagonaliserbar, da der er 2 forskellige egenværdier.

Hvis $k = 7$ er der kun én egenværdi, nemlig 7.
$vFv - \gamma\cdot E$ bliver så blot $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Derfor er den geometriske multiplicitet 1.
I det tilfælde er f **ikke** diagonaliserbar.

BILAG

restart

with(*LinearAlgebra*) :

1)

$v_1 := \langle 3, 1 \rangle : v_2 := \langle -1, 3 \rangle :$

2)

$$LinearSolve(\langle v_1 | v_2 \rangle, \langle 1, 7 \rangle) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$vFv := \langle 3, 0 | 1, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$vFv.\langle 1, 1 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3)

a)

$$A := v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B := v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C := v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$4 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left| Determinant\left(\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right| = 60$$

4)

$$eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$eFe := eMv \cdot vFv \cdot eMv^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

5)

$$Eigenvectors(eFe, output = list) = \left[\left[2, 1, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[3, 1, \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

$$u_1 := Normalize(\langle -2, 1\rangle, 2) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$u_2 := Normalize(\langle 3, 1\rangle, 2) = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

6)

$$vFv := \langle k, 0 | 1, 7\rangle = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$solve(Determinant(vFv - \lambda \cdot IdentityMatrix(2)) = 0, \lambda) = 7, k$$

$$Rank(subs(k = 7, vFv) - 7 \cdot IdentityMatrix(2)) = 1$$

$$Eigenvectors(vFv, output = list) = \left[\left[7, 1, \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{-7 + k} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[k, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Her går det også galt, hvis $k = 7$.