Eksamen Matematik 1 E21 Möbius delen (1 time)

Opgaverne tager udgangspunkt i den udgave, som kan findes på Matematik 1 hjemmesiden.

De enkelte spørgsmål er klippet ud, og løst effektivt med Maple 2021.2.

1)

Lad a_0 og a_1 betegne to reelle tal.
Vi betragter et polynomium P givet ved:

$$P(z) = 4 \cdot \left(z^2 + a_1 \cdot z \ + \ a_0\right) \ , \ z \in \mathbb{C}$$

Det oplyses at polynomiet P har en rod z_1 med absolutværdi 3 og hovedargument $-\frac{3}{4}\pi$.

Lad z_2 betegne den anden rod i polynomiet.

a)

a) Rødderne z_1 og z_2 kan angives på følgende rektangulære form:

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (x_1 + I \ \cdot y_1) \ , \ x_1 \in \mathbb{R} \ , \ y_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot (x_2 + I \ \cdot y_2) \ , \ x_2 \in \mathbb{R} \ , \ y_2 \in \mathbb{R}$$

Angiv værdierne:

$x_1 =$

$y_1 =$

$x_2 =$

$y_2 =$

Løsning

restart

$z_1 := \operatorname{polar}\left(3, -\frac{3}{4} \cdot \pi\right) :$

$evalc(z_1) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\,I\sqrt{2}}{2}$

$x_1 := \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$

$y_1 := \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$

Da koefficienterne i $P(z)$ alle er reelle tal, så er de 2 rødder komplekst konjugerede, dvs.

$z_2 := \overline{z_1} = \mathrm{polar}\left(3, \frac{3}{4}\pi\right)$

$evalc(z_2) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\,I\sqrt{2}}{2}$

$x_2 := \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$

$y_2 := \mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$

b)

Bestem koefficienterne a_0 og a_1:

$a_0 =$

$a_1 =$

Løsning

Faktorisering af polynomiet $z^2 + a_1 \cdot z + a_0$ er givet ved:

$(z - z_1) \cdot (z - z_2) = \left(z - \mathrm{polar}\left(3, -\frac{3\pi}{4}\right)\right)\left(z - \mathrm{polar}\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$expand(\%) = z^2 + 3z\sqrt{2} + 9$

Konklusion: $\underline{\underline{a_0 = 9}}$ og $\underline{\underline{a_1 = 3\cdot\sqrt{2}}}$

2)

Et lineært ligningssystem har totalmatricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & 14 & 0 \\ -1 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)

a) Hvilke af nedenstående vektorer er en løsning til ligningsystemet?

(a) $\begin{bmatrix} -19 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -20 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -19 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 26 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -19 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$

Løsning

restart

Totalmatricen T:

$$T := \langle 1, 2, 9, -1; 2, 2, 14, 0; -1, -1, -7, 0; 1, -1, 3, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & 14 & 0 \\ -1 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatricen A:

$$A := T[1..4, 1..3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 14 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Højre side b:

$$b := T[1..4, 4..4] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tester de 5 muligheder:

a)

$$A.\langle -19, -9, 3 \rangle =$$

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -14 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dur ikke, da det ikke giver b.

b)

$\langle -20, -8, 4, 0\rangle$ dur ikke, da den har 4 koordinater, og der kan skal være 3 koordinater i løsningen.

c)

$$A.\langle -19, -9, 5\rangle = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dur ikke, da det ikke giver b.

d)

$$A.\langle 26, 9, -5\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dur, da det giver b.

e)

$$A.\langle -19, -9, 4\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dur, da det giver b.

Konklusion: (d) og (e) dur.

b)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved sin afbildningmatrix mht. standardbasis i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 14 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Angiv en egentlig vektor w som tilhører kernen for f.

$w =$ ____

Løsning

Afbildningsmatricen F burde hedde eFe!
Den er identisk med koefficientmatricen A i spørgsmål a).

$with(LinearAlgebra)$:

Kernen bestemmes:

$$NullSpace(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Konklusion: w kan f.eks. være vektoren $\underline{\underline{(-5, -2, 1)}}$

c)

Det oplyses at vektoren $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ 2 \\ u_3 \\ 5 \end{bmatrix}$ tilhører det ortogonale komplement til billedrummet $f\left(\mathbb{R}^3\right)$.

c) Angiv de to ukendte elementer u_1 og u_3 i vektoren.

$u_1 =$

$u_3 =$

Løsning

Det ortogonale komplement er givet ved at løse det transponerede ligningssystem.

$$A_T := A^{\%T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 9 & 14 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$V := A_T \cdot \langle u_1, 2, u_3, 5 \rangle = \begin{bmatrix} u_1 + 9 - u_3 \\ 2\,u_1 - 1 - u_3 \\ 9\,u_1 + 43 - 7\,u_3 \end{bmatrix}$$

$$solve(\{V[1]=0, V[2]=0, V[3]=0\}) = \{u_1 = 10, u_3 = 19\}$$

3)

Et homogent system af differentialligninger er givet på matrixform ved:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

a)

Hvilke af nedenstående par af funktioner er løsninger til differentialligningssystemet:

(a) $x(t) = 15\,e^{3t} + 4\,e^{4t}, y(t) = 0$

(b) $x(t) = 15\,e^{3t} + 4\,e^{4t}, y(t) = -3\,e^{3t}$

(c) $x(t) = 15\,e^{3t}, y(t) = -3\,e^{3t}$

(d) $x(t) = 15\,e^{3t} - 4\,e^{-3t}, y(t) = -3\,e^{3t}$

Løsning

restart

$L := dsolve(\{x'(t) = 4 \cdot x(t) + 5 \cdot y(t), y'(t) = 3 \cdot y(t)\}) = \{x(t) = -5\,\_C2\,e^{3t} + \_C1\,e^{4t}, y(t) = \_C2\,e^{3t}\}$
$x := unapply(rhs(L[1]), t) :$
$x(t) = -5\,\_C2\,e^{3t} + \_C1\,e^{4t}$
$y := unapply(rhs(L[2]), t) :$
$y(t) = \_C2\,e^{3t}$

a)

$solve(\{x(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t} + 4 \cdot e^{4 \cdot t}, y(t) = 0\}) = \left\{\_C1 = \frac{4\,e^{t} + 15}{e^{t}}, \_C2 = 0, t = t\right\}$

Dur ikke, da koefficienterne ikke må afhænge af t.

b)

$solve(\{x(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t} + 4 \cdot e^{4 \cdot t}, y(t) = -3 \cdot e^{3 \cdot t}\}) = \{\_C1 = 4, \_C2 = -3, t = t\}$

Løsningen dur!

c)

$solve(\{x(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t}, y(t) = -3 \cdot e^{3 \cdot t}\}) = \{\_C1 = 0, \_C2 = -3, t = t\}$

Løsningen dur!

d)

$solve(\{x(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t} - 4 \cdot e^{-3 \cdot t}, y(t) = -3 \cdot e^{3 \cdot t}\}) = \left\{\_C1 = -\frac{4}{(e^{t})^{7}}, \_C2 = -3, t = t\right\}$

Dur ikke, da koefficienterne ikke må afhænge af t.

Konklusion: (b) og (c) er løsninger.

b)

Et inhomogent system af differentialligninger er givet på matrixform ved:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4\,t - 3 \end{bmatrix}$$

Find en partikulær løsning til systemet ved at gætte på en løsning på formen:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot t + b_1 \\ a_2 \cdot t + b_2 \end{bmatrix}$$

angiv konstanterne a_1, b_1, a_2 og b_2:

$a_1 =$

$b_1 =$

$a_2 =$

$b_2 =$

Løsning

restart

Løser det inhomogene differentialligningssystem:

$L := dsolve(\{x'(t) = 4 \cdot x(t) + 5 \cdot y(t) + 2, y'(t) = 3 \cdot y(t) + 4 \cdot t - 3\}, \{x(t), y(t)\}) =$

$$\left\{x(t) = \_C1\, e^{4t} - 5\, e^{3t}\, \_C2 + \frac{5}{3}\, t - \frac{7}{9}, y(t) = -\frac{4}{3}\, t + \frac{5}{9} + e^{3t}\, \_C2\right\}$$

De eksponentielle led udgår, da man søger lineære løsninger!

Tilbage er:

$subs(\_C1 = 0, \_C2 = 0, L) = \left\{x(t) = -\frac{7}{9} + \frac{5\, t}{3}, y(t) = -\frac{4\, t}{3} + \frac{5}{9}\right\}$

Hermed kan de 4 koefficienter direkte aflæses:

Konklusion: $\underline{\underline{a_1 = \frac{5}{3}, b_1 = -\frac{7}{9}, a_2 = -\frac{4}{3}, b_2 = \frac{5}{9}}}$