Eksamensopgave 6. december 2022, 2-timers prøven, DTU Matematik 1 (E22)

Opgave 1

Lad a, b og c være vilkårlige reelle tal. Vi betragter matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

og vektorerne $\mathbf{v}_1 = (7, 1, -3)$ og $\mathbf{v}_2 = (4, b, c)$.

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

$A(a) := \langle a, 1, 2, 1; 1, a, 1, 2; 2, 1, a, 1 \rangle$:

$$A(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := \langle 7, 1, -3 \rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \langle 4, b, c \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

1.1

Lad $a = 0$. Bestem på standardparameterform den fuldstændige løsning til matrixligningen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 .$$

$$LinearSolve(A(0), v_1) = \begin{bmatrix} -2 - \_t_4 \\ 1 + \_t_4 \\ 3 - \_t_4 \\ \_t_4 \end{bmatrix}$$

Konklusion: den fuldstændige løsning er

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hvor } t \in \mathbb{R}$$

1.2

Lad $a = 2$. Bestem de værdier af b og c for hvilke matrixligningen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_2$$

har løsninger.

Der er løsning til ligningssystemet, hvis rangen af A er identisk med rangen af den udvidede matrix $\langle A | v_2 \rangle$.

$$A(2) = = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$Rank(A(2)) = 2$

Det ses straks, at de 2 første søjler er lineært uafhængige.

Danner så matrix bestående af de 2 søjler samt v_2:

$$\langle A(2)[1..3, 1..2] | v_2 \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Denne matrix skal have determinant 0, så 3. søjle er lineært afhængigt af de 2 første søjler.

$Determinant(\%) = 3\,c - 12$

$solve(\% = 0, \{b, c\}) = \{b = b, c = 4\}$

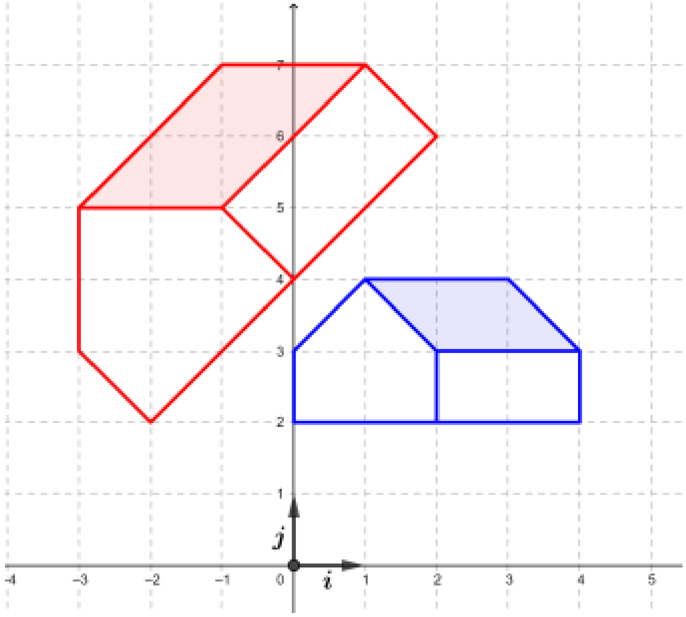
NB: Med 2 parametre b og c kan man ikke anvende $Rank$ på den udvidede matrix!

Konklusion: der er løsninger, hvis $\underline{\underline{c = 4}}$ (og b er vilkårlig)

Opgave 2

Lad $G2$ betegne mængden af vektorer i planen som tænkes afsat ud fra Origo i et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, hvori standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes e.

En lineær afbildning $f : G2 \rightarrow G2$ er nedenfor illustreret således: Et blåt punkt P med stedvektor $\overrightarrow{OP}$ afbildes i et rødt punkt som er endepunktet for $f(\overrightarrow{OP})$. Den røde figur er således billedet ved f af den blå figur.



Vi betragter vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ givet ved ${}_e\mathbf{v}_1 = (3,4)$ og ${}_e\mathbf{v}_2 = (0,2)$.

$restart : with(LinearAlgebra) :$
$with(VektorAnalyse4) = [div, grad, kryds, prik, rot, vop]$

$ev_1 := \langle 3, 4\rangle : ev_2 := \langle 0, 2\rangle :$

2.1

Gør rede for at vektorsættet $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en ny basis for $G2$. Bestem basisskiftematricen ${}_e\mathbf{M}_v$.

2.1.1

$$eMv := \langle ev_1 | ev_2\rangle = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$Rank(eMv) = 2$
eller:
$Determinant(eMv) = 6$

Da rangen er 2, så er de 2 vektorer lineært uafhængige. Tilsvarende, da determinanten er $\neq 0$.

Konklusion: da de 2 vektorer er lineært uafhængige, og $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, så udgør v_1 og v_2 en basis for $G2$.

2.1.2

Basisskiftematricen eMv er givet ved $eMv = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2.2

Find billedvektorerne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$, og bestem afbildningsmatricerne ${}_e\mathbf{F}_v$ og ${}_e\mathbf{F}_e$ for f.

2.2.1

Billedvektorerne kan direkte aflæses på figuren ovenfor, idet stwedvektorerne v_1 og v_2 ender på hjørnepunkter i huset.

Konklusion: $f(v_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ og $f(v_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.3.2

Afbildningsmatricen *eFv* består så blot af de billedsøjler:

$$eFv := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}:$$

Konklusion: Afbildningsmatricen *eFv* er: $eFv = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2.3.3

Den anden afbildningsmatrix *eFe* kan bestemmes via basisskiftematricen *eMv*.

$$vMe := eMv^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$eFe := eFv \cdot vMe = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Konklusion: Afbildningsmatricen *eFv* er: $eFv = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.3

Vektoren $\mathbf{w}$ er givet ved ${}_e\mathbf{w} = (1,4)$. Bestem vinklen mellem $\mathbf{w}$ og dens billede $f(\mathbf{w})$. Gør rede for at vinklen mellem en vilkårlig anden egentlig vektor og dens billedvektor er identisk med vinklen mellem $\mathbf{w}$ og $f(\mathbf{w})$.

2.3.1

$ew := \langle 1, 4 \rangle$:

Billedet $f(w)$ er: $ef_w := eFe \cdot ew = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem de 2 vektorer:

$$\arccos\left(\frac{prik(ew, ef_w)}{\sqrt{prik(ew, ew)}\cdot\sqrt{prik(ef_w, ef_w)}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}\sqrt{34}}{34}\right)$$

$$simplify(\%) = \frac{\pi}{4}$$

eller:

$$VectorAngle(ew, ef_w) = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}\sqrt{34}}{34}\right)$$

$$simplify(\%) = \frac{\pi}{4}$$

Konklusion: vinklen mellem de 2 vektorer er $\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ radianer eller $\underline{\underline{45°}}$

2.3.2

En vilkårlig vektor *ew* defineres:

$ew := \langle x, y\rangle$:

Billedet $f(w)$ er: $ef_w := eFe \cdot ew = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$

Vinklen mellem de 2 vektorer:

$$\arccos\left(\frac{prik(ew, ef_w)}{\sqrt{prik(ew, ew)}\cdot\sqrt{prik(ef_w, ef_w)}}\right) = \arccos\left(\frac{x\,(x-y)+y\,(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}}\right)$$

$$simplify(\%) = \frac{\pi}{4}$$

Konklusion: vinklen mellem en vektor og dens billede er ALTID $\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ radianer eller $\underline{\underline{45°}}$

NB: $Norm(V, 2)$ frem for $prik(V, V)$ er svært at få reduceret! *VectorAngle* er heller ikke lige til at få reduceret!

Opgave 3

Om en reel 3×3 matrix $\mathbf{A}$ er der oplyst dens karakteristiske polynomium på fuldstændig faktoriseret form:

$$P(\lambda) = (\lambda+2)\cdot\left(\lambda-1+\frac{i}{2}\right)\cdot\left(\lambda-1-\frac{i}{2}\right),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

3.1

Opskriv egenværdierne for $\mathbf{A}$.

Man kan direkte aflæse egenværdierne i det faktoriserede polynomium. Det er når hver af parenteserne er 0.

To af egenværdierne er komplekst konjugeret, nemlig $1-\frac{i}{2}$ og $1+\frac{i}{2}$. Endvidere er der egenværdien -2.

Konklusion: egenværdierne er $\underline{\underline{-2,\ 1\pm\frac{i}{2}}}$

3.2

Det oplyses videre at vektoren $\mathbf{u}_1=(1,0,0)$ tilhører egenrummet E_{-2}, og at vektoren $\mathbf{u}_2=(0,i,-1)$ tilhører egenrummet $E_{1-\frac{i}{2}}$. Bestem på den baggrund $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2$.

Da $u_1\in E_{-2}$, så vil $A\cdot u_1=(-2)\cdot u_1=(-2)\cdot(1,0,0)=(-2,0,0)$

Da $u_2\in E_{1-\frac{i}{2}}$, så vil $A\cdot u_2=\left(1-\frac{i}{2}\right)\cdot u_2=\left(1-\frac{i}{2}\right)\cdot(0,i,-1)=\left(0,\frac{1}{2}+i,-1+\frac{i}{2}\right)$

Konklusion: $\underline{\underline{A\cdot u_1=(-2,0,0)}}$ og $\underline{\underline{A\cdot u_2=\left(0,\frac{1}{2}+i,-1+\frac{i}{2}\right)}}$

3.3

Angiv en 3×3 matrix som stemmer overens med de oplysninger der er givet ovenfor om $\mathbf{A}$.

Egenrummene er: $E_{-2}=span\{(1,0,0)\}$, $E_{1-\frac{i}{2}}=span\{(0,i,-1)\}$ og $E_{1+\frac{i}{2}}=span\{(0,-i,-1)\}$

idet de 2 egenrum hørende til $1\pm\frac{i}{2}$ er komplekst konjugerede!

En diagonalmatrix kan opskrives i standardbasis:

$$\Lambda := DiagonalMatrix\left(\left\langle -2,1-\frac{I}{2},1+\frac{I}{2}\right\rangle\right)=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1-\frac{I}{2}&0\\0&0&1+\frac{I}{2}\end{bmatrix}$$

I følge sætning 14.7 i eNote 14 kan A bestemmes som $V\cdot\Lambda\cdot V^{-1}$
hvor V findes som en matrix, hvor de 3 søjler er egenvektor fra hver af de 3 egenrum:

$$V := \langle 1,0,0|0,I,-1|0,-I,-1\rangle=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&I&-I\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

Nu kan matricen A bestemmes:

$$A := V\cdot\Lambda\cdot V^{-1}=$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Konklusion: matricen A kan f.eks. være $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Tjek1

$$Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[1 + \frac{I}{2}, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[1 - \frac{I}{2}, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Det passer!

Tjek2

$$p(\lambda) := Determinant(A - \lambda \cdot IdentityMatrix(3)) :$$

$$p(\lambda) = -\frac{(2+\lambda)(4\lambda^2 - 8\lambda + 5)}{4}$$

$$expand(p(\lambda)) = -\lambda^3 + \frac{11}{4}\lambda - \frac{5}{2}$$

Sammenlign med det givne:

$$expand\left((\lambda+2)\cdot\left(\lambda - 1 + \frac{I}{2}\right)\cdot\left(\lambda - 1 - \frac{I}{2}\right)\right) = -\frac{11}{4}\lambda + \frac{5}{2} + \lambda^3$$

Forkert fortegn. UPS!

Så der er fejl i opgaveformuleringen!

Der mangler et minustegn foran det karakteristiske polynomium, som er angivet i starten af opgave 3.

Dvs. det karakteristiske polynomium burde være givet ved:

$$p(\lambda) = -(\lambda+2)\cdot\left(\lambda - 1 + \frac{i}{2}\right)\cdot\left(\lambda - 1 - \frac{i}{2}\right)$$

Opgave 4

Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$restart : with(LinearAlgebra) :$

$$A := \langle -3, 0; 4, -2 \rangle = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

4.1

Bestem **A**'s egenværdier, og angiv for hver af dem en tilhørende egentlig egenvektor.

4.1.1

$$Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[-2, 1, \left\{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\right\}\right], \left[-3, 1, \left\{\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{array}\right]\right\}\right]\right]$$

Konklusion: egenværdierne er $\underline{\underline{-3}}$ og $\underline{\underline{-2}}$

4.1.2

Konklusion: tilhørende egenrum er $\underline{\underline{E_{-3} = span\left\{\left(-\frac{1}{4}, 1\right)\right\}}}$ og $\underline{\underline{E_{-2} = span\{(0, 1)\}}}$

Et inhomogent lineært differentialligningssystem er givet ved

$$x_1'(t) + 3x_1(t) = -1 + 6t$$
$$x_2'(t) - 4x_1(t) + 2x_2(t) = -8t$$

4.2

Bestem den fuldstændige løsning til det til det givne differentialligningssystem svarende homogene differentialligningssystem.

Differentialligningssystemet kan omskrives til:

$$\left[\begin{array}{c} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} -1 + 6 \cdot t \\ -8 \cdot t \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{array}\right] = A . \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} -1 + 6 \cdot t \\ -8 \cdot t \end{array}\right]$$

Matricen A er således systemmatricen.

Det tilhørende homogene differentialligningssystem er:

$$\left[\begin{array}{c} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{array}\right] = A . \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right]$$

Den fuldstændige løsning til det homogene differentialligningssystem kan direkte opskrives med videnen fra spørgsmål 4.1 og sætning 17.2 i eNote 17:

Konklusion: $\underline{\underline{\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = c_1 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{array}\right] + c_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]}}$ hvor $t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>eller</u>:

Direkte med Maple:

$dsolve(\{x_1'(t) = -3\cdot x_1(t), x_2'(t) = 4\cdot x_1(t) - 2\cdot x_2(t)\}) =$

$\{x_1(t) = \_C2\, e^{-3t}, x_2(t) = -4\,\_C2\, e^{-3t} + \_C1\, e^{-2t}\}$

Bemærk, at der er byttet lidt rundt, men udtrykkene er identiske: $-4\cdot\ \_C2 = c_1$ og $\_C1 = c_2$.

<u>eller</u>:

Første differentialligning $x_1(t) = -3\cdot x_1(t)$ kan løses direkte som: $x_1(t) = c_1\cdot e^{-3\cdot t}$.
Denne løsning kan indskrives i anden differentialligning, som så kan løses med **panserformlen** sætning 16.16 i eNote 16!

$x_2'(t) = 4\cdot x_1(t) - 2\cdot x_2(t) \Leftrightarrow x_2'(t) = 4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t} - 2\cdot x_2(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{x_2'(t) + 2\cdot x_2(t) = 4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t}}$

$p(t) = 2 \Rightarrow P(t) = \int p(t)\,dt = \int 2\,dt = 2\cdot t$

$q(t) = 4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t}$

$x_2(t) = e^{-P(t)}\cdot\int e^{P(t)}\cdot q(t)\,dt + c_2\cdot e^{-P(t)} = e^{-2\cdot t}\cdot\int e^{2\cdot t}\cdot 4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t}\,dt + c_2\cdot e^{-2\cdot t} =$
$e^{-2\cdot t}\cdot\int e^{2\cdot t}\cdot 4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t}\,dt + c_2\cdot e^{-2\cdot t} = 4\cdot c_1\cdot e^{-2\cdot t}\cdot\int e^{-t}\,dt + c_2\cdot e^{-2\cdot t} =$
$4\cdot c_1\cdot e^{-2\cdot t}\cdot(-e^{-t}) + c_2\cdot e^{-2\cdot t} = -4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t} + c_2\cdot e^{-2\cdot t}$

Løsning er altså: $x_1(t) = c_1\cdot e^{-3\cdot t}$ og $x_2(t) = -4\cdot c_1\cdot e^{-3\cdot t} + c_2\cdot e^{-2\cdot t}$ hvor $t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Samme udtryk som ovenfor, når c'erne skaleres!

4.3

Der findes en partikulær løsning $(x_1(t), x_2(t))$ til det givne inhomogene differentialligningssystem hvor $x_1(t) = at + b$ og $x_2(t) = ct + d$. Indsæt dette bud på en partikulær løsning i differentialligningssystemet og bestem derved tallene a, b, c og d.

$$DL := \begin{bmatrix} diff(a\cdot t + b, t) \\ diff(c\cdot t + d, t) \end{bmatrix} = A.\begin{bmatrix} a\cdot t + b \\ c\cdot t + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 + 6\cdot t \\ -8\cdot t \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -3\,a\,t - 3\,b + 6\,t - 1 \\ 4\,a\,t - 2\,c\,t + 4\,b - 2\,d - 8\,t \end{bmatrix}\right)$$

$L_1 := lhs(DL)[1] = rhs(DL)[1] = a = -3\,a\,t - 3\,b + 6\,t - 1$
$L_2 := lhs(DL)[2] = rhs(DL)[2] = c = 4\,a\,t - 2\,c\,t + 4\,b - 2\,d - 8\,t$

Disse 2 ligninger skal gælde for alle værdier af $t \in \mathbb{R}$.

Indsætter 2 værdier, og løser de 4 ligninger:
$solve(\{subs(t=0, L_1), subs(t=0, L_2), subs(t=1, L_1), subs(t=1, L_2)\}) =$
$\{a = 2, b = -1, c = 0, d = -2\}$

Konklusion: tallene er $a = 2, b = -1, c = 0, d = -2$

4.4

Brug resultaterne i spørgsmål 2 og 3 til at bestemme den fuldstændige løsning til det givne inhomogene differentialligningssystem.

I spørgsmål 4.3 er der bestemt en partikulær løsning:

$$\begin{bmatrix} a\cdot t + b \\ c\cdot t + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot t - 1 \\ 0\cdot t - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot t - 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningsystem bestemmes som sum af den fuldstændige løsning til det tilhørende homogen differentialligningssystem (spørgsmål 2) + en enkel partikulær løsning til det inhomogene system (spørgsmål 3).

Konklusion: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\cdot e^{-3\cdot t}\cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\cdot e^{-2\cdot t}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot t - 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ hvor $t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Maple-tjek

$dsolve\left(\{x_1'(t) = -3\cdot x_1(t) - 1 + 6\cdot t, x_2'(t) = 4\cdot x_1(t) - 2\cdot x_2(t) - 8\cdot t\}\right) =$

$\{x_1(t) = 2\,t - 1 + \_C2\,e^{-3\,t}, x_2(t) = -2 + \_C1\,e^{-2\,t} - 4\,\_C2\,e^{-3\,t}\}$

Bemærk, at der er byttet lidt rundt, men udtrykkene er identiske: $-4\cdot \_C2 = c_1$ og $\_C1 = c_2$.