Maj 2007 (udvalgte opgaver)

Alternativ besvarelse på udvalgte dele af opgaverne.

Opgave 3

```
> restart;
  with(Integrator8) :
  with(plots) :
  with(VektorAnalyse2) :
> r(u, v) := <u + v, u^2, v^2> : 'r(u, v)'=r(u, v)
```

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u+v \\ u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1)

Partielle afledede

```
> ru := diff~(r(u, v), u)
```

$$ru := \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

```
> rv := diff~(r(u, v), v)
```

$$rv := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\,v \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

Dvs. de partielle afledede er $r_u' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\cdot u \\ 0 \end{bmatrix}$ og $r_v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\cdot v \end{bmatrix}$

2)

Normalvektor

```
> N := kryds(ru, rv)
```

$$N := \begin{bmatrix} 4\,u\,v \\ -2\,v \\ -2\,u \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

Dvs. normalvektoren

$$N = \begin{bmatrix} 4 \cdot u \cdot v \\ -2 \cdot v \\ -2 \cdot u \end{bmatrix}$$

3)

Flux

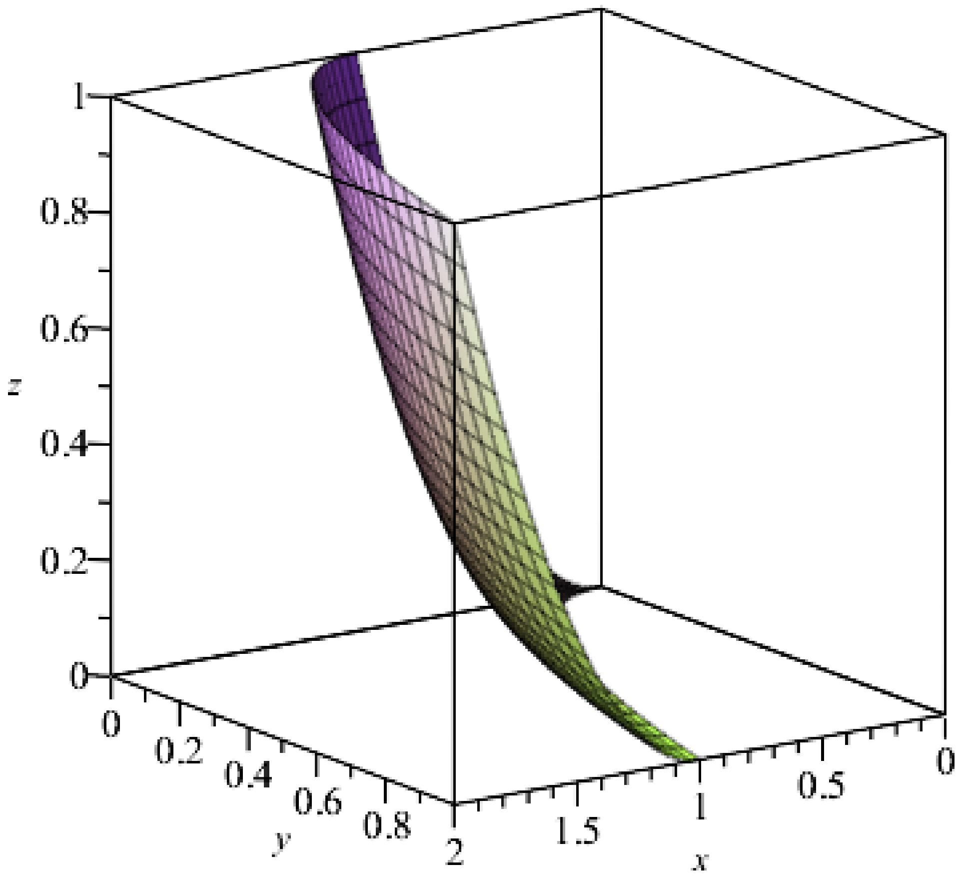
> $B := [0, 1, 0, 1]$

$$B := [0, 1, 0, 1] \qquad (1.3.1)$$

> $V := (x, y, z) \rightarrow \langle x \cdot y, 0, y \cdot z \rangle : V(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} x\,y \\ 0 \\ y\,z \end{bmatrix} \qquad (1.3.2)$$

> $plot3d(r(u, v), u = 0..1, v = 0..1, labels = [x, y, z], axes = boxed)$



Med Integrator8-pakken:

> $fluxIntGo(r, B, V)$

$$\frac{17}{30} \qquad (1.3.3)$$

eller med standard-formlen:

> $\int_0^1 \int_0^1 prik(V(vop(r(u,v))), N)\, du\, dv$

$$\frac{17}{30} \tag{1.3.4}$$

Dvs. fluxen af V gennem fladen F er $\underline{\underline{\frac{17}{30}}}$

Opgave 4

3)

Jacobi-funktionen

> *restart*;
> *with*(*Integrator8*) :
> *with*(*plots*) :
> *with*(*VektorAnalyse2*) :
> *with*(*LinearAlgebra*) :

> $r(u,v,w) := \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), w\cdot\cos(u)\rangle$:'r(u, v, w)'=r(u, v, w)

$$r(u,v,w) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ w\cos(u) \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

> $B := \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, 1\right]$:

> $\langle diff\sim(r(u,v,w),u) | diff\sim(r(u,v,w),v) | diff\sim(r(u,v,w),w)\rangle$

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ -w\sin(u) & 0 & \cos(u) \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

> *Jacobi* := *Determinant*(%)

$$Jacobi := \cos(v)^2\, u\cos(u) + \sin(v)^2\, u\cos(u) \tag{2.1.3}$$

> *simplify*(*Jacobi*)

$$\cos(u)\, u \tag{2.1.4}$$

Dvs. Jacobi-funktionen for parametriseringen *r* af det rumlige område *A* er $\underline{\underline{u\cdot\cos(u)}}$

4

Rumfang

Standard-metoden med Jacobi-funktionen:

> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 1\cdot Jacobi\, dw\, dv\, du$

$$\frac{\pi\left(-1+\frac{\pi}{2}\right)}{2} \qquad (2.2.1)$$

eller ved brug af Integrator8-pakken:

> *rumIntGo*(*r*, *B*, 1); *evalf*(%)

$$-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi^2$$
$$0.896604774 \qquad (2.2.2)$$

Dvs. rumfanget af det rumlige område A er $\underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2} \approx 0.897}}$

5)

Divergensen

> $V := (x, y, z) \rightarrow \langle x\cdot(\cos(y))^2, y, z\cdot(\sin(y))^2\rangle : V(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} x\cos(y)^2 \\ y \\ z\sin(y)^2 \end{bmatrix} \qquad (2.3.1)$$

> *div*(*V*)(*x*, *y*, *z*); *simplify*(%)

$$1+\cos(y)^2+\sin(y)^2$$
$$2 \qquad (2.3.2)$$

Dvs. divergensen af V er $\underline{\underline{2}}$

6)

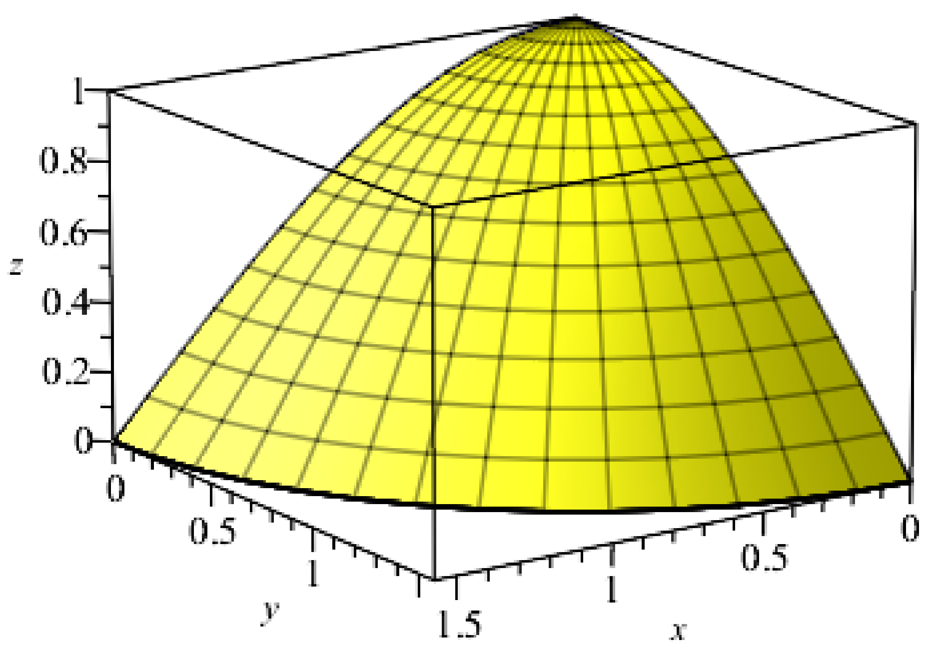
Volumen

> *net* := [5, 5, 5]

$$net := [5, 5, 5] \qquad (2.4.1)$$

> *område* := *sideFlader*(*r*, *B*, *net*) :

> *display*(*område*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *axes* = *boxed*)



> *GaussFluxGo*(*r*, *B*, *V*); *evalf*(%)

$$-\pi + \frac{1}{2}\pi^2$$

$$1.793209548 \quad \textbf{(2.4.2)}$$

Dvs. fluxen af V gennem overfladen af området A er $-\pi + \frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.79$