Maj 2009 (udvalgte opgaver)

Alternativ besvarelse på udvalgte dele af opgaverne.

Opgave 3

> *restart;*
> *with(Integrator8) :*
> *with(plots) :*
> *with(VektorAnalyse2) :*
> *with(LinearAlgebra) :*

1)

Divergens

> $V(x, y, z) := \langle -y, x, -6\cdot z\rangle$:'$V(x, y, z)$'$= V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ -6\,z \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

> $div(V)(x, y, z)$

$$-6 \tag{1.1.2}$$

Dvs. divergensen af V er $\underline{\underline{-6}}$

2)

Parametrisering

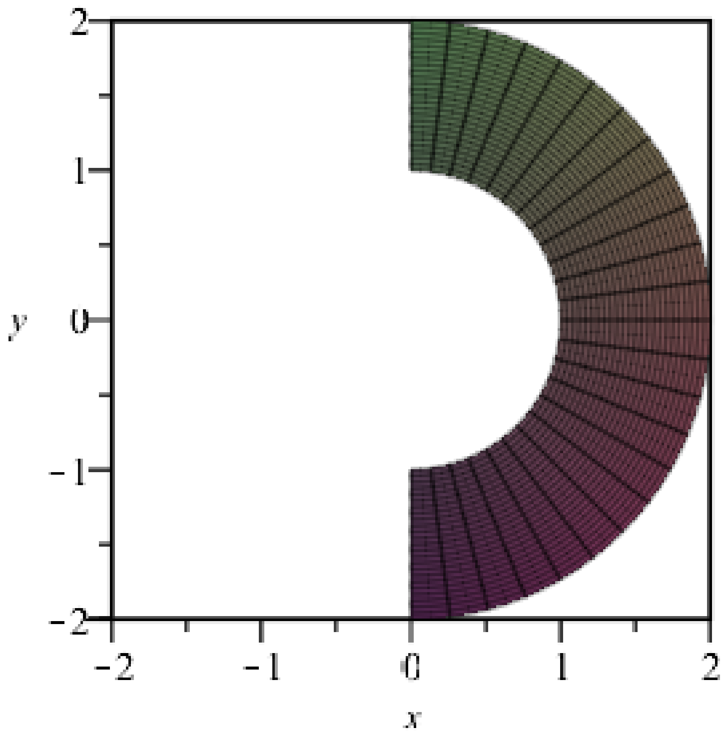
Parameterfremtilling af B:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cdot\cos(v) \\ u\cdot\sin(v) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [1;2],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

> $rB(u, v) := \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v)\rangle$:'$rB(u, v)$'$= rB(u, v)$

$$rB(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

> $plot3d\left(\langle rB(u, v)_1, rB(u, v)_2, 0\rangle, u = 1..2, v = -\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}, labels = [x, y, \text{" "}], axes = box, orientation = [-90, 0], view = [-2..2, -2..2, -2..2]\right);$



3)

Parameterfremstilling for $\mathbb{L}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \\ w \cdot u \cdot \cos(v) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [1;2], v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], w \in [0;1]$$

> $rL(u, v, w) := \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), w \cdot u \cdot \cos(v) \rangle$:'$rL(u, v, w)$'$= rL(u, v, w)$

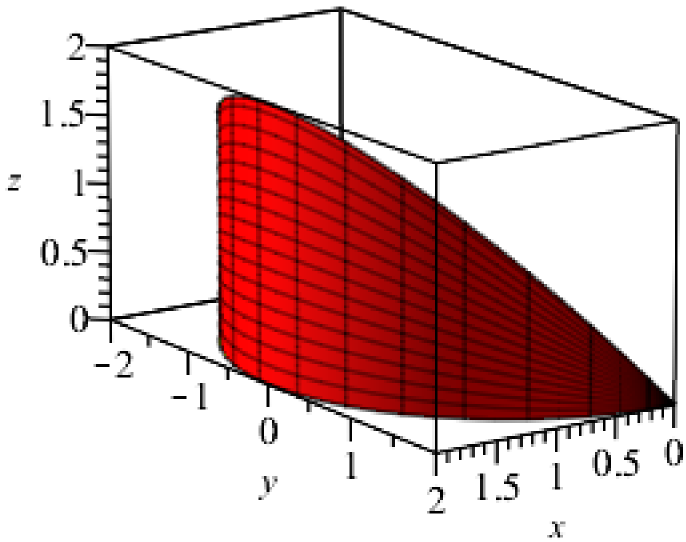
$$rL(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ w\, u \cos(v) \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

> $iL := \left[1, 2, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 1\right]$:

> $net := [10, 10, 10]$:

> $område := sideFlader(rL, iL, net)$:

> $display(område, labels = [x, y, z], axes = box, view = [0..2, -2..2, 0..2])$



> $\langle diff\sim(rL(u,v,w),u)|diff\sim(rL(u,v,w),v)|diff\sim(rL(u,v,w),w)\rangle$

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ w\cos(v) & -w\,u\sin(v) & u\cos(v) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

> $Jacobi := Determinant(\%)$

$$Jacobi := \cos(v)^3 u^2 + \sin(v)^2 u^2 \cos(v) \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

> $Jacobi := simplify(Jacobi)$

$$Jacobi := \cos(v)\, u^2 \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

Dvs. Jacobi-funktionen for parametriseringen rL af det rumlige område $\mathbb{L}$ er $\underline{\underline{u^2 \cdot \cos(v)}}$

Rumfanget bestemt med standard-metoden:

> $\int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 1 \cdot Jacobi \,\mathrm{d}w\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u$

$$\frac{14}{3} \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

Rumfanget bestemt direkte vha. Integrator8-pakken:

> $rumIntGo(rL, iL, 1)$

$$\frac{14}{3} \tag{1.3.6}$$

Rumfanget af $\mathbb{L}$ er altså $\underline{\underline{\frac{14}{3}}}$

4)

Flux

Direkte vha. **Integrator8-pakken**:

> $GaussFluxGo(rL, iL, V)$

$$-28 \tag{1.4.1}$$

Ved brug af **Gauss'-sætning** :
Fluxen af V gennem overfladen af $\mathbb{L}$ = rumintegralet af divergensen af V = rumintegralet af -6 (i følge spørgsmål 1) = $-6 \cdot$rumfanget af $\mathbb{L}$ = $-6 \cdot \frac{14}{3}$ (i følge spørgsmål 3) = -28

Dvs. fluxen af vektorfeltet V ud gennem fladen $\delta\mathbb{L}$ er altså: $\underline{\underline{-28}}$

Opgave 4

> $restart;$
> $with(Integrator8):$
> $with(plots):$
> $with(VektorAnalyse2):$

1)

Rotation

> $U(x, y, z) := \langle y\cdot(z-1), z\cdot(x-1), x\cdot(y-1)\rangle$:'$U(x, y, z)$'$= U(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \begin{bmatrix} y\,(z-1) \\ z\,(x-1) \\ x\,(y-1) \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

> $V(x, y, z) := rot(U)(x, y, z)$:'$V(x, y, z)$'$= V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Dvs. rotationen V af vektorfeltet U er $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

2)

Kurven $\mathbb{K}$ er givet ved følgende parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [0; 2\cdot\pi]$$

> $r2(u) := \langle \cos(u), \sin(u), 0 \rangle$:'$r2(u,v)$'$= r2(u,v)$

$$r2(u,v) = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.2.1)$$

> $B2 := [0, 2\cdot\pi]$:

Direkte vha. Integrator8-pakken:

> $tangKurveIntGo(r2, B2, U)$

$$\pi \qquad (2.2.2)$$

Med standard-metoden:

> $\int_0^{2\cdot\pi} prik(U(vop(r2(u))), diff\sim(r2(u), u))\, du$

$$\pi \qquad (2.2.3)$$

Dvs. det tangentielle kurveintegral af vektorfeltet U langs kurven $\mathbb{K}$ er $\underline{\underline{\pi}}$

3)

Gradientvektorfelt

Da $rot(U) = V \neq$ nulvektoren, så er U ikke et gradientvektorfelt.

4)

Omdrejningsfladen $\mathbb{O}$ er givet ved følgende parameterfremstilling:

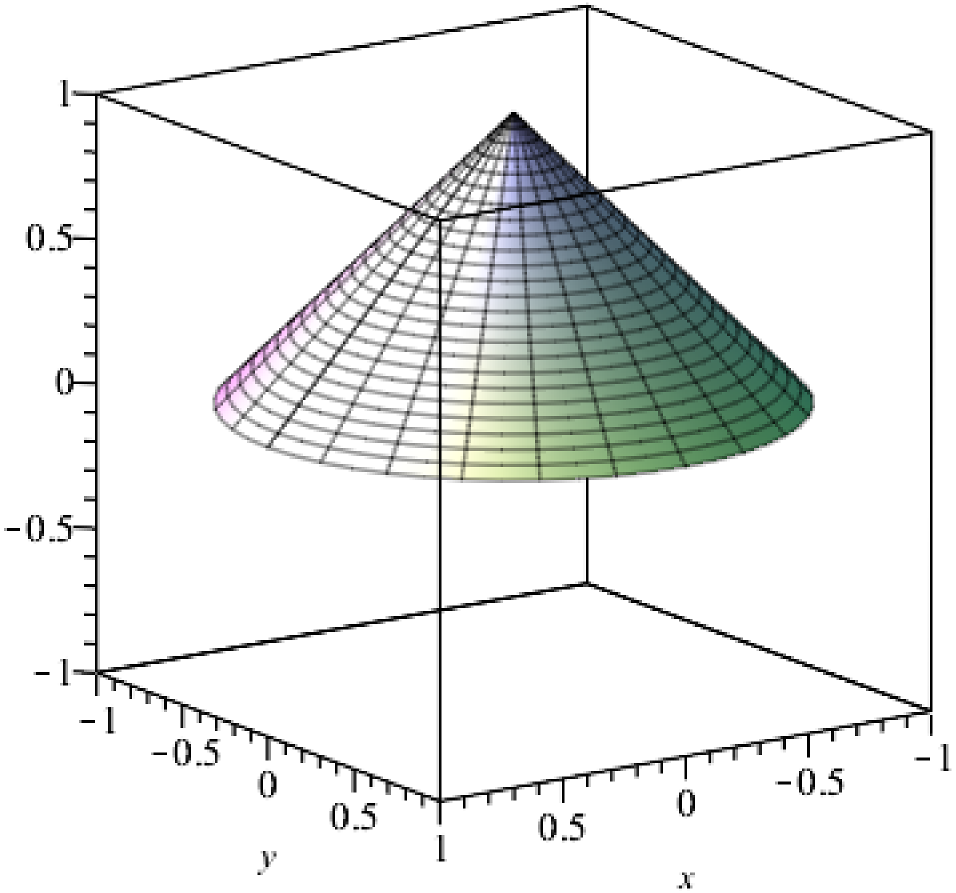
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cdot\cos(v) \\ u\cdot\sin(v) \\ 1-u \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [0; 1], v \in [0; 2\cdot\pi]$$

> $r4(u,v) := \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), 1-u \rangle$:'$r4(u,v)$'$= r4(u,v)$

$$r4(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ 1-u \end{bmatrix} \qquad (2.4.1)$$

> $B4 := [0, 1, 0, 2\cdot\pi]$:

> $plot3d\left(r4(u,v), u = 0..1, v = 0..2\cdot\pi, labels = [x, y, z], axes = box, view = [-1..1, -1..1, -1..1]\right)$



Direkte vha. **Integrator8-pakken**:

> *fluxIntGo*(*r4*, *B4*, *V*)

$$\pi \tag{2.4.2}$$

Ved brug af **Stokes' sætning**:

Fluxen af V gennem fladen 𝕆 = Fluxen af rot(U) gennem fladen 𝕆 = det tangentielle kurveintegral af U langs randen = π (i følge spørgsmål 2).

Fluxen af vektorfeltet V gennem omdrejningsfladen 𝕆 er altså: $\underline{\underline{\pi}}$