Maj 2010 (udvalgte opgaver)

Alternativ besvarelse på udvalgte dele af opgaverne.

Opgave 3

```
> restart;
  with(Integrator8) :
  with(plots) :
  with(VektorAnalyse2) :
```

1)

Parameterfremstilling

Parameterfremstilling af 𝔽:

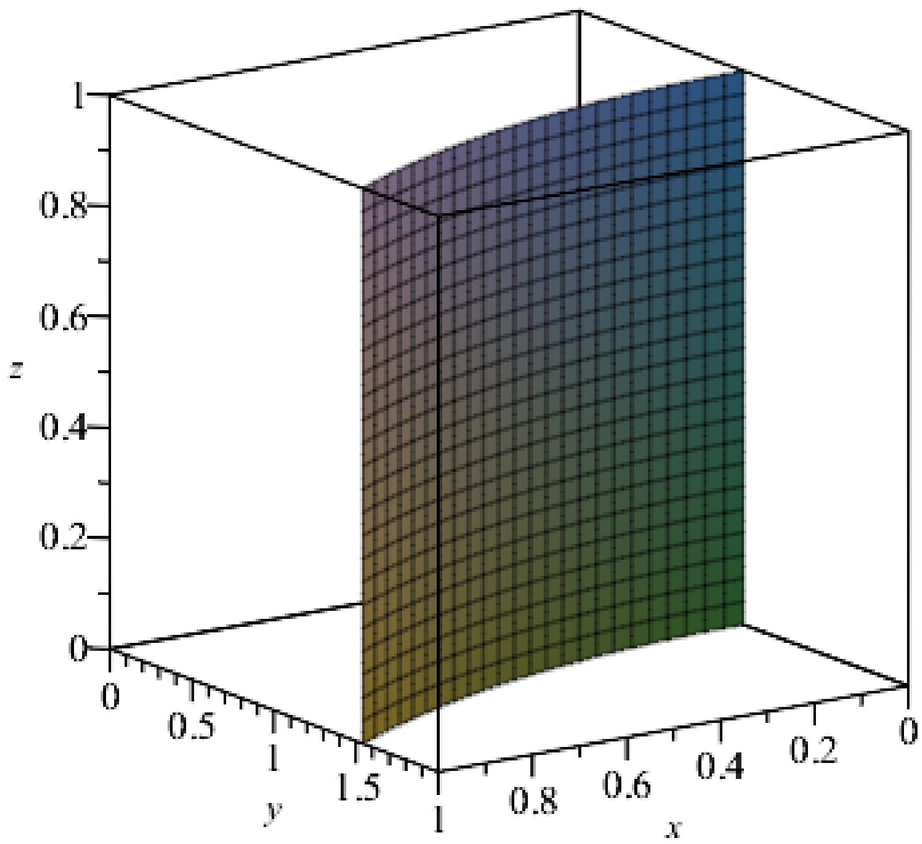
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \cosh(u) \\ v \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [0; 1], v \in [0; 1]$$

```
> r1(u, v) := ⟨u, cosh(u), v⟩ : 'r1(u, v)' = r1(u, v)
```

$$r1(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ \cosh(u) \\ v \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

```
> B1 := [0, 1, 0, 1] :
```

```
> plot3d(r1(u, v), u = 0 ..1, v = 0 ..1, labels = [x, y, z], axes = boxed, view = [0 ..1, 0 ..2, 0
      ..1], caption = 'cylinderflade 𝔽')
```



cylinderflade $\mathbb{F}$

2)

Arealet

Ved brug af Integrator8-pakken:

> $fladeIntGo(r1, B1, 1)$

$$-\frac{e^{-1}}{2}+\frac{e}{2} \tag{1.2.1}$$

> $\sinh(1)$

$$\sinh(1) \tag{1.2.2}$$

> $is((1.2.1)=(1.2.2))$

$$true \tag{1.2.3}$$

Med standard-metoden:

Jacobi-funktionen udregnes:

> $N1 := kryds(diff\sim(r1(u,v),u), diff\sim(r1(u,v),v))$

$$N1 := \begin{bmatrix} \sinh(u) \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

> $Jacobi := \sqrt{prik(N1, N1)}$

$$Jacobi := \sqrt{1 + \sinh(u)^2} \quad \textbf{(1.2.5)}$$

> $simplify(Jacobi)$

$$\mathrm{csgn}(\cosh(u))\,\cosh(u) \quad \textbf{(1.2.6)}$$

> $Jacobi := simplify(Jacobi)$ assuming $u > 0$

$$Jacobi := \cosh(u) \quad \textbf{(1.2.7)}$$

> $\int_0^1 \int_0^1 Jacobi \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u;\ evalf(\%)$

$$\sinh(1)$$
$$1.175201194 \quad \textbf{(1.2.8)}$$

Konklusion: Arealet er

$$\frac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot (-1 + e^2) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} \cdot e^1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \underline{\underline{\sinh(1)}} \approx 1.175$$

3)

Kurveintegral

> $r2(u) := \left\langle u, \cosh(u), \frac{1}{2} \right\rangle$: $'r2(u)' = r2(u)$

$$r2(u) = \begin{bmatrix} u \\ \cosh(u) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.1)}$$

> $B2 := [0, 1]$:

> $f2(x, y, z) := 2 \cdot z$: $'f2(x, y, z)' = f2(x, y, z)$

$$f2(x, y, z) = 2\,z \quad \textbf{(1.3.2)}$$

Direkte med Integhrator8-pakken:

> $kurveIntGo(r2, B2, f2)$

$$\sinh(1) \quad \textbf{(1.3.3)}$$

Med standard-metoden:

Jacobi-funktionen:

> $N2 := diff\sim(r2(u), u)$

$$N2 := \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4)}$$

> $Jacobi := \sqrt{prik(N2, N2)}$

$$Jacobi := \sqrt{1 + \sinh(u)^2} \quad \textbf{(1.3.5)}$$

> $simplify(Jacobi)$

$$\mathrm{csgn}(\cosh(u))\,\cosh(u) \quad \textbf{(1.3.6)}$$

> $Jacobi := simplify(Jacobi)$ assuming $u > 0$

$$Jacobi := \cosh(u) \quad \textbf{(1.3.7)}$$

Dvs. Jacobi-funktionen er $\underline{\underline{\cosh(u)}}$

> $\int_0^1 prik(f2(vop(r2(u))), Jacobi)\, du$

$$\sinh(1) \qquad (1.3.8)$$

Konklusion: Kurveintegralet er $\underline{\underline{\sinh(1)}}$

Opgave 4

NB: I opgaven er vektorfeltet V ikke kendt. Man kender kun divergensen og rotationen af V. Derfor skal Gauss' sætning og Stokes sætning anvendes!

```
> restart;
  with(Integrator8) :
  with(plots) :
  with(plottools) :
  with(VektorAnalyse2) :
  with(LinearAlgebra) :
```

1)

Rumfang

Område Ω:

> $r1(u, v, w) := \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), w \cdot (1 - u^3) \rangle$:'$r1(u, v, w)$'$= r1(u, v, w)$

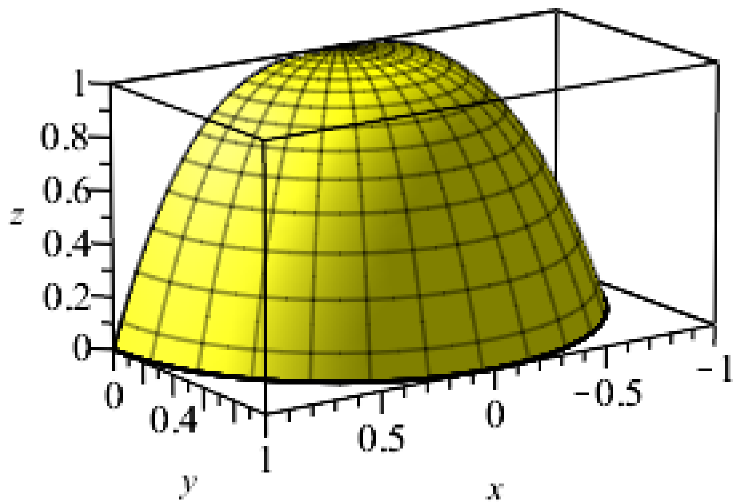
$$r1(u, v, w) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ w(-u^3+1) \end{bmatrix} \qquad (2.1.1)$$

> $B1 := [0, 1, 0, \pi, 0, 1]$:

> $net := [10, 10, 10]$:

> $områdeΩ := sideFlader(r1, B1, net)$:

> $display(områdeΩ, labels = [x, y, z], axes = boxed, view = [-1..1, 0..1, 0..1], caption = 'område Ω')$



$$område\,\Omega$$

Direkte med Integrator8-pakken:

> *rumIntGo*(*r1*, *B1*, 1)

$$\frac{3\pi}{10} \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Med standard-metoden:

> ⟨*diff*~(*r1*(*u*, *v*, *w*), *u*)|*diff*~(*r1*(*u*, *v*, *w*), *v*)|*diff*~(*r1*(*u*, *v*, *w*), *w*)⟩

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ -3\,w\,u^2 & 0 & -u^3+1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.3)}$$

> *Jacobi* := *Determinant*(%)

$$Jacobi := -\cos(v)^2 u^4 - \sin(v)^2 u^4 + \cos(v)^2 u + \sin(v)^2 u \quad \textbf{(2.1.4)}$$

> *Jacobi* := *simplify*(*Jacobi*)

$$Jacobi := -u^4 + u \quad \textbf{(2.1.5)}$$

> $\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^1 1 \cdot Jacobi \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$

$$\frac{3\pi}{10} \quad \textbf{(2.1.6)}$$

Dvs. rumfanget er $\frac{3}{10}\pi$

2)

Fluxen

Flade $\mathbb{F}$ (overflade af området):

> $divV(x, y, z) := 5$:'$divV(x, y, z)$'$= divV(x, y, z)$

$$divV(x, y, z) = 5 \tag{2.2.1}$$

Ved brug af **Integrator8-pakken** og **Gauss' sætning**:

> $rumIntGo(r1, B1, divV)$

$$\frac{3\pi}{2} \tag{2.2.2}$$

Med **Gauss' sætning** får man direkte:

Fluxen af V gennem fladen $\mathbb{F}$ = rumintegralet af divergensen af V over det rummelige område Ω =

$5 \cdot$rumfanget af Ω (da div(V) er konstant 5) $= 5 \cdot \frac{3}{10}\pi$ (fra spørgsmål 1) $= \frac{3}{2} \cdot \pi$

Dvs. fluxen af vektorfeltet V gennem overfladen $\mathbb{F}$ af området er $\frac{3}{2} \cdot \pi$

3)

Tangentielt kurveintegral

Tegning af kurven K:

> $r2(u) := \langle u, 0, 1 - |u|^3 \rangle$:'$r2(u)$'$= r2(u)$

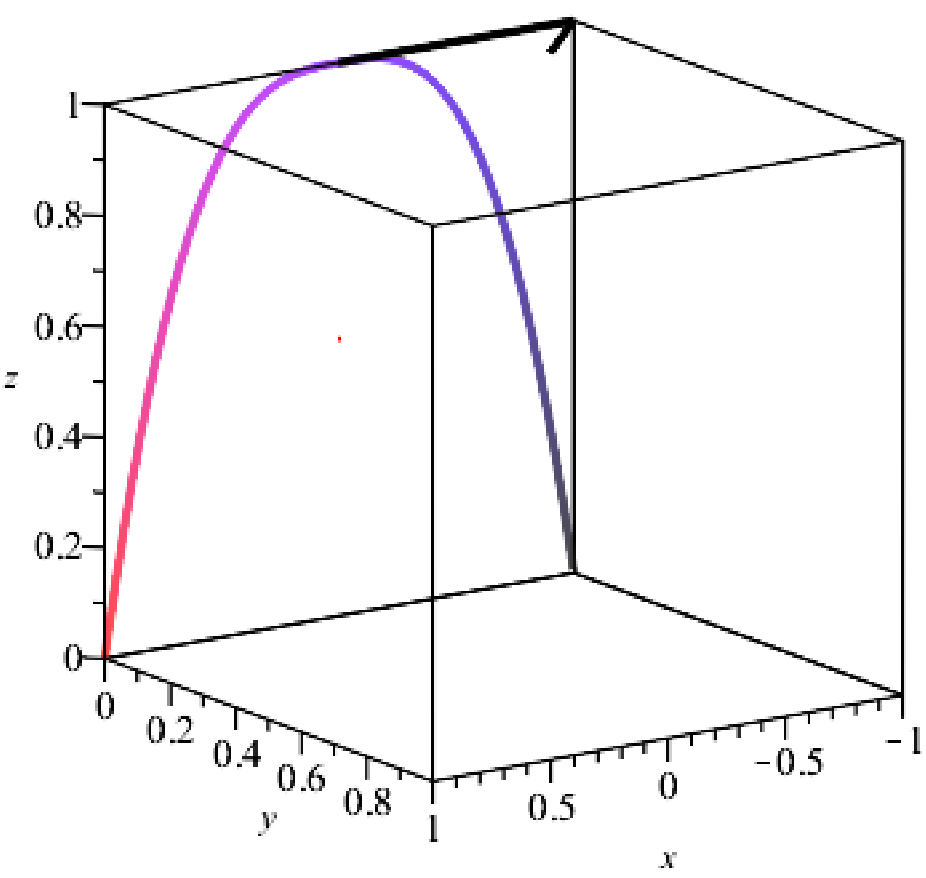
$$r2(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 1 - |u|^3 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

> $kurveK := spacecurve(r2(u), u = -1..1, thickness = 3)$:

> $omløbsretningK := arrow([0, 0, 1], [0, 0, 1] + [-1, 0, 0], 0.2, 0.1, 0.1, arrow, thickness = 3, color = black)$:

> $rotationV := arrow\left(\left[0, 0, \frac{1}{2}\right], \left[0, 0, \frac{1}{2}\right] + [0, -2, 0], 0.2, 0.1, 0.1, arrow, thickness = 3, color = red\right)$:

> $display(kurveK, omløbsretningK, rotationV, labels = [x, y, z], axes = boxed, view = [-1..1, 0..1, 0..1], caption = 'kurve\ K')$



kurve K

Tangentielle kurveintegral:

Stokes sætning anvendes, idet V ikke kendes. Man kender kun div(v) og rot(V).

> $rotV(x, y, z) := \langle 0, -2, 0 \rangle$: $'rotV(x, y, z)' = rotV(x, y, z)$

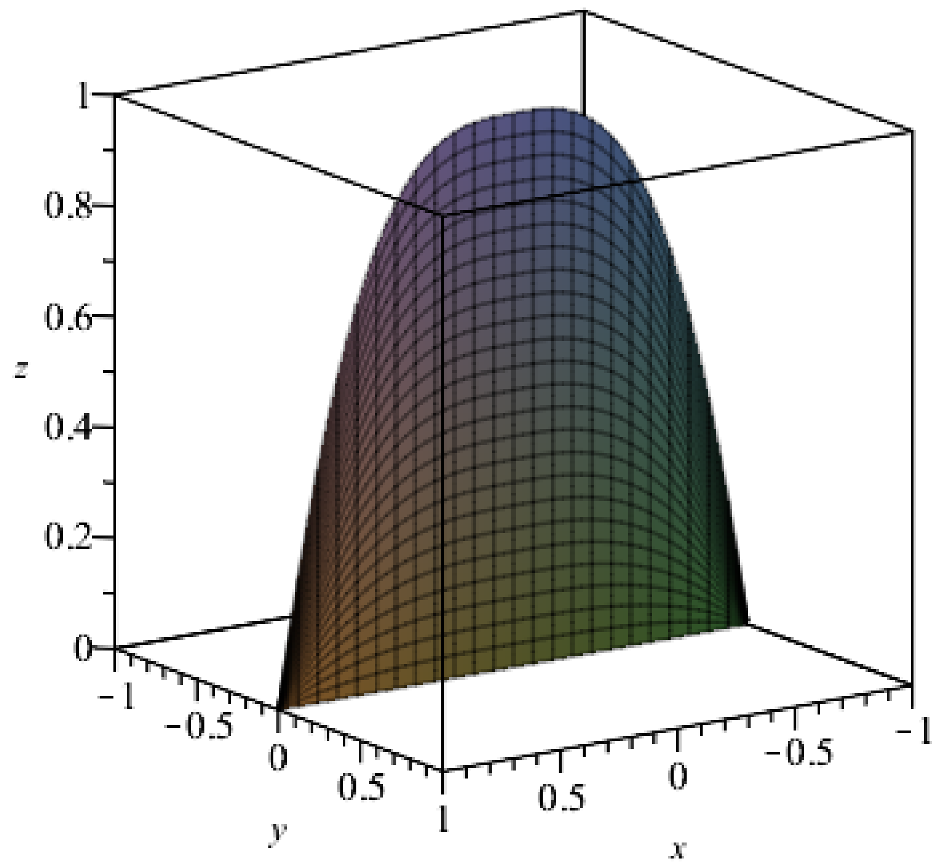
$$rotV(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.2)}$$

> $r3(u, w) := \langle u, 0, w \cdot (1 - |u|^3) \rangle$:$'r3(u, w)' = r3(u, w)$

$$r3(u, w) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w\,(1 - |u|^3) \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.3)}$$

> $B3 := [-1, 1, 0, 1]$:

> $plot3d(r3(u, w), u = -1..1, w = 0..1, labels = [x, y, z], axes = boxed, caption = 'endeflade')$



endeflade

Med den valgte omløbsretning er der tale om en højreskrue, hvis fladens normalvektor har følgende værdi:

> $n := \langle 0, -1, 0 \rangle$:

> $prik(n, rotV(x, y, z))$

$$2 \qquad \textbf{(2.3.4)}$$

Vha. Integrator8-pakken:

> $fladeIntGo(r3, B3, prik(n, rotV(x, y, z)));$

$$3 \qquad \textbf{(2.3.5)}$$

Med standard-metoden:

> $N3 := kryds(diff\sim(r3(u, w), u), diff\sim(r3(u, w), w))$

$$N3 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 + |u|^3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

> $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} prik(rotV(vop(r3(u, w))), N3)\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}u$

$$3 \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

Dvs. det tangentielle kurveintegral af vektorfeltet V langs kurven K er

3.