Maj 2011 (udvalgte opgaver)

Alternativ besvarelse på udvalgte dele af opgaverne.

Opgave 3

> $restart;$
> $with(Integrator8):$
> $with(VektorAnalyse2):$

1)

Tangentielt kurveintegral langs $\mathbb{K}_r$

> $r(u) := \langle u, \sin(u), \cos(u)\rangle$:'$r(u)$'$=r(u)$

$$r(u) = \begin{bmatrix} u \\ \sin(u) \\ \cos(u) \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

> $B := [0, 1]:$

> $V(x, y, z) := \langle e^x, -z, y\rangle$:'$V(x, y, z)$'$= V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x \\ -z \\ y \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

Direkte med Integrator8-pakken:

> $tangKurveIntGo(r, B, V)$

$$-2 + e \quad (1.1.3)$$

Med standard-metoden:

> $prik(V(vop(r(u))), diff\sim(r(u), u))$

$$e^u - \cos(u)^2 - \sin(u)^2 \quad (1.1.4)$$

> $Integrant := simplify(\%)$

$$Integrant := e^u - 1 \quad (1.1.5)$$

Dvs. $\underline{\underline{V(r(u)) \cdot r'(u) = e^u - 1}}$

> $\int_0^1 Integrant \, du$

$$-2 + e \quad (1.1.6)$$

Dvs. det tangentielle kurveintegral af V langs $\mathbb{K}_r$ er $\underline{\underline{e - 2}}$

2)

Tangentielt kurveintegral langs $\mathbb{K}_s$

> $s(u) := \langle u \cdot x_0, u \cdot y_0, u \cdot z_0\rangle$: '$s(u)$'$= s(u)$

(1.2.1)

$$s(u) = \begin{bmatrix} u\, x_0 \\ u\, y_0 \\ u\, z_0 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

Direkte med Integrator8-pakken:

> *tangKurveIntGo*(*s*, *B*, *V*)

$$-1 + e^{x_0} \tag{1.2.2}$$

Med standard-metoden:

> *prik*(*V*(*vop*(*s*(*u*))), *diff*~(*s*(*u*), *u*))

$$e^{u\, x_0}\, x_0 \tag{1.2.3}$$

> *Integrant* := %:

Dvs. $\underline{\underline{V(r(u)) \bullet r'(u) = x_0 \cdot e^{u \cdot x_0}}}$

> $\int_0^1 Integrant \, du$

$$-1 + e^{x_0} \tag{1.2.4}$$

Dvs. det tangentielle kurveintegral af V langs $\mathbb{K}_s$ er altså $\underline{\underline{e^{x_0} - 1}}$

3)

Gradient-vektorfelt

> *rot*(*V*)(*x*, *y*, *z*)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

Da rotationen af $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq$ nulvektoren, så er V <u>*ikke*</u> et gradient-vektorfelt.

Opgave 4

> *restart*;
> *with*(*Integrator8*) :
> *with*(*plots*) :
> *with*(*VektorAnalyse2*) :
> *with*(*LinearAlgebra*) :

1)

Forskrift

> $h(x, y) := 2 - x - y$:'$h(x, y)$'$= h(x, y)$

$$h(x, y) = 2 - x - y \tag{2.1.1}$$

2)

Masse af flade

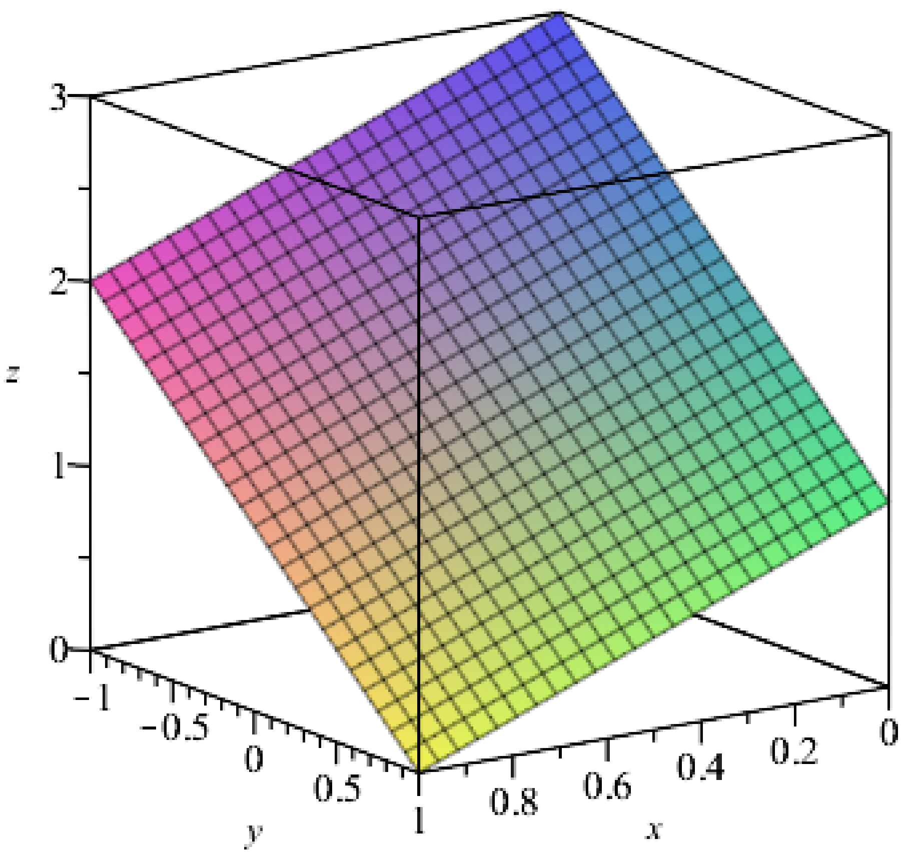
Fladen $\mathbb{F}$ er givet ved følgende parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 2-u-v \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [0;1] \text{ og } v \in [-1;1]$$

> $r2(u,v) := \langle u, v, 2-u-v \rangle$:'$r2(u,v)$'$=r2(u,v)$

$$r2(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 2-u-v \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.1)}$$

> $plot3d(r2(u,v), u=0..1, v=-1..1, labels=[x,y,z], axes=box, caption=$"Fladen $\mathbb{F}$")



Fladen $\mathbb{F}$

> $B2 := [0, 1, -1, 1]$:

> $f(x,y,z) := x+y+z$:'$f(x,y,z)$'$=f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = x+y+z \quad \textbf{(2.2.2)}$$

Direkte med Integrator8-pakken:

> $fladeIntGo(r2, B2, f)$

(2.2.3)

$$4\sqrt{3} \tag{2.2.3}$$

Med standard-metoden:

Jacobi-funktionen udregnes:

> $N := kryds(diff\sim(r2(u,v),u), diff\sim(r2(u,v),v))$

$$N := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

> $Jacobi := \sqrt{prik(N,N)}$

$$Jacobi := \sqrt{3} \tag{2.2.5}$$

> $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(vop(r2(u,v))) \cdot Jacobi \, dv \, du$

$$4\sqrt{3} \tag{2.2.6}$$

Dvs. massen (fladeintegralet over $\mathbb{F}$) er altså: $\underline{\underline{4 \cdot \sqrt{3}}}$

3)

Tangentielt kurveintegral

> $V(x,y,z) := \langle x, y, x \cdot y \rangle$:'$V(x,y,z)$'$= V(x,y,z)$

$$V(x,y,z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x\,y \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

> $rotV(x,y,z) := rot(V)(x,y,z)$:'$rotV(x,y,z)$'$= rotV(x,y,z)$

$$rotV(x,y,z) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Dvs. rotationen af V er $\underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}}}$

Beregning på 3 måder med Integrator8-pakken:

> $StokesRandIntGo(r2, B2, V)$

$$1 \tag{2.3.3}$$

> $StokesFluxGo(r2, B2, V)$

$$1 \tag{2.3.4}$$

> $fluxIntGo(r2, B2, rotV)$

$$1 \tag{2.3.5}$$

Stokes sætning siger, at de 3 måder skal give det samme resultat.

Med standard-metoden (og Stokes' sætning):

> $\int_0^1 \int_{-1}^1 prik(V(vop(r2(u, v))), N)\, dv\, du$

$$1 \tag{2.3.6}$$

Dvs. det tangentielle kurveintegral af V lange randen af fladen $\mathbb{F}$, er $\underline{\underline{1}}$

4)

Flux

Området Ω er givet ved følgende parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w\cdot(2-u-v) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad u \in [0;1], v \in [-1;1] \text{ og } w \in [0;1]$$

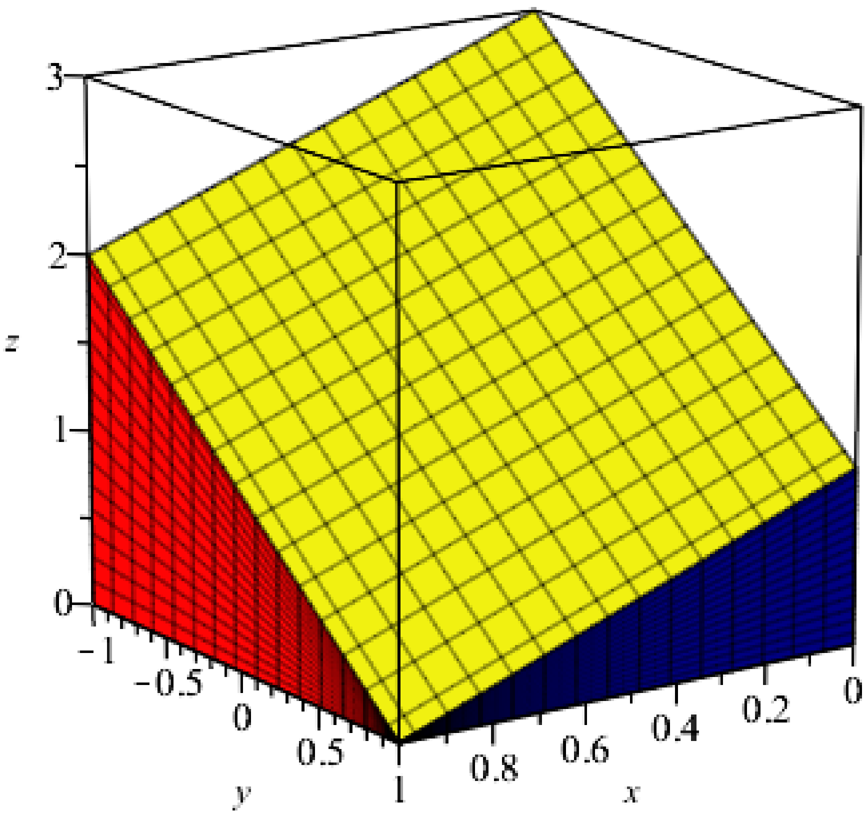
> $r4(u, v, w) := \langle u, v, w\cdot(2-u-v)\rangle$:'$r4(u, v, w)$'$= r4(u, v, w)$

$$r4(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w\,(2-u-v) \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

> $B4 := [0, 1, -1, 1, 0, 1]$:

> $net := [10, 10, 10]$:

> $områdeΩ := sideFlader(r4, B4, net)$: $display(områdeΩ, axes = box, labels = [x, y, z], scaling = unconstrained, caption = $"Området Ω"$)$



Området Ω

> $divV(x, y, z) := div(V)(x, y, z)$:'$divV(x, y, z)$'$= divV(x, y, z)$

$$divV(x, y, z) = 2 \tag{2.4.2}$$

Dvs. divergensen er konstant: $divV = 2$

Beregning på 3 måder med Integrator8-pakken:

> $rumIntGo(r4, B4, divV)$

$$6 \tag{2.4.3}$$

> $GaussFluxGo(r4, B4, V)$

$$6 \tag{2.4.4}$$

> $divIntGo(r4, B4, V)$

$$6 \tag{2.4.5}$$

Gauss' sætning siger, at de 3 måder skal give det samme resultat.

Med standard-metoden (og Gauss' sætning):

> $\langle diff\sim(r4(u, v, w), u) | diff\sim(r4(u, v, w), v) | diff\sim(r4(u, v, w), w)\rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w & -w & 2-u-v \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

> $Jacobi := Determinant(\%)$

$$Jacobi := 2 - u - v \tag{2.4.7}$$

> $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^1 divV(vop(r4(u, v, w))) \cdot Jacobi \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$

$$6 \tag{2.4.8}$$

Dvs. fluxen af V ud gennem området Ω er $\underline{\underline{6}}$