# Håndregning eksamen dec. 2023, Mat1a, DTU

*restart* :

## Opgave 1

a) Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn: $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$.

b) Er de logiske udsagn $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ og $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ logisk ækvivalente?

### Svar

#### *a)*

Definition 1.7 og 1.8 i eNote 01 anvendes.

Danner sandhedstavlen for $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ :

| $P$ | $R$ | $Q$ | $P \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F |
| T | F | T | F | F |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F |
| F | F | T | T | T |
| F | F | F | T | F |

#### *b)*

Danner sandhedstavlen for $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ :

| $P$ | $R$ | $Q$ | $R \Rightarrow P$ | $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F |
| T | F | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | T |
| F | F | F | T | F |

**De 2 sandhedstavler er ikke ens, derfor er $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ og $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ ikke logisk ækvivalente.**

NB: vigtigt, at P, Q og R er beskrevet på nøjagtig samme måde og rækkefølge i spørgsmål a) og b).

## Opgave 2

Skriv følgende komplekse tal på rektangulær form:

a) $e^{i\pi/2} \cdot (2+i)$.

b) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2})^4$.

### Svar

#### *a)*

$$e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot (2+i) = i\cdot(2+i) = 2\cdot i + i^2 = 2\cdot i - 1 = \underline{\underline{-1+2\cdot i}}$$

#### *b)*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{\left(i\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot 4} = e^{i\cdot\pi} = \underline{\underline{-1}}$$

## Opgave 3

For alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ defineres

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2}.$$

Besvar nu følgende spørgsmål:

a) Beregn $s_2, s_3$ og $s_4$.

b) Vis med induktion efter $n$ at $s_n = \frac{n^2+n-2}{4}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

### Svar

#### *a)*

$$s_2 = \sum_{k=2}^{2} \frac{k}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$s_3 = \sum_{k=2}^{3} \frac{k}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

$$s_4 = \sum_{k=2}^{4} \frac{k}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

#### *b)*

Induktionsbevis for formlen $s_n = \dfrac{n^2 + n - 2}{4}$ for $n \geq 2$

**Starttrin:**
$n = 2$

$s_2 = 1$ ifølge svar a).

$$\frac{n^2+n-2}{4} = \frac{2^2+2-2}{4} = \frac{4+2-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Dvs. formlen gælder for $n = 2$.

**Antag at formlen gælder for $n-1$, så skal det bevises at den gælder for $n$.**

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k}{2} + \frac{n}{2} = \frac{(n-1)^2 + (n-1) - 2}{4} + \frac{n}{2} = \frac{(n^2+1-2\cdot n) + (n-1) - 2}{4} + \frac{n}{2} =$$

$$\frac{n^2+1-2\cdot n + n - 1 - 2}{4} + \frac{2\cdot n}{4} = \boldsymbol{\frac{n^2+n-2}{4}}$$

Induktionsantagelsen er anvendt ved de 2 rødtfarvede udtryk.

**Hermed er formlen vist ved induktion.**

# Opgave 4

Der gives følgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Afgør om matricen $\mathbf{A}$ er invertibel. Hvis ja, beregn $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Lad nu $n$ være et naturligt tal og $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en invertibel matrix. Kan 0 være en egenværdi for $\mathbf{B}$? Gør rede for dit svar.

## Svar

### *a)*

Matricen A sammensættes med en identitetsmatrix til højre. Begge er 2 x 2. Den sammensatte matrix er så 2 x 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der udføres rækkeoperationer for - om muligt - at få en 2 x 2 identitetsmatrix til venstre.

Række 1 ganges med 3 og lægges til række 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Række 2 ganges med 2 og lægges til række 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Da det er muligt at få identitetsmatricen til venstre, så er A invertibel.**

Og den inverse matrix til A er:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

***b)***

Hvis 0 er en egenværdi, så gælder: $A \cdot v = 0 \cdot v = \overline{0}$ for en egenvektor $v \neq \overline{0}$.
Det betyder, at søjlevektorerne i A er lineært afhængige.
Derfor er determinanten af A = 0.
**Men så er A <u>ikke</u> invertibel.**

# Opgave 5

Lad $V = \{a + bZ + cZ^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ være underrummet af det reelle vektorrum $\mathbb{R}[Z]$ bestående af polynomier af grad højst 2. Der vælges følgende ordnede basis for $V$:

$$\gamma = (1 + 2Z, 2 + Z - Z^2, Z^2).$$

For en lineær afbildning $L : V \to V$ oplyses følgende afbildningsmatrix:

$${}_\gamma[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Hvilke af basisvektorerne $1 + 2Z$, $2 + Z - Z^2$ og $Z^2$ er i $\ker(L)$? Er polynomiet $1 + 2Z + Z^2$ i $\ker(L)$? Gør rede for dit svar.

b) Find baser for $\ker(L)$ og $\text{image}(L)$.

## Svar

***a)***

I den angivne basis γ vil de 3 basisvektorer fra γ have koordinaterne:
$\gamma_1 = 1 + 2 \cdot Z$ har koordinaterne $(1, 0, 0)$
$\gamma_2 = 2 + Z - Z^2$ har koordinaterne $(0, 1, 0)$
$\gamma_3 = Z^2$ har koordinaterne $(0, 0, 1)$

Derfor kan afbildningsmatricen $\gamma[L]\gamma$ anvendes til at beregne billedet af de 3 basisvektorer:

$L(\gamma_1) = L(1 + 2 \cdot Z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, **derfor ligger $\mathbf{1 + 2 \cdot Z}$ i kernen $\boldsymbol{ker(L)}$**

$L(\gamma_2) = L(2 + Z - Z^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, **derfor ligger $\mathbf{2 + Z - Z^2}$ i kernen $\boldsymbol{ker(L)}$**

$L(\gamma_3) = L(Z^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, **derfor ligger $\mathbf{1 + 2 \cdot Z}$ <u>ikke</u> i kernen $\boldsymbol{ker(L)}$**

Polynomiet $1 + 2 \cdot Z + Z^2$ har koordinaterne $(1, 0, 1)$ i basis γ.

$$L(1+Z+Z^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$, **derfor ligger $1+Z+Z^2$ <u>ikke</u> i kernen $ker(L)$**

***b)***

<u>Basis for $ker(L)$</u>:

Skal finde alle løsninger til ligningssystemet:

$$\gamma[L]\gamma \cdot x = \overline{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \gamma_1 + s \cdot \gamma_2 \text{, hvor } t, s \in \mathbb{R}$$

Dvs. $ker(L)$ er udspændt af $\gamma_1$ og $\gamma_2$ .

**Konklusion:** basis for $ker(L)$ er $\underline{\underline{\gamma_1 \; og \; \gamma_2}}$ eller $\underline{\underline{1 + 2 \cdot Z \; og \; 2 + Z - Z^2}}$

<u>Basis for $image(L)$</u>:

Billedet ved L er udspændt af de maksimalt antal lineært uafhængige søjlevektorer fra afbildningsmatricen $\gamma[L]\gamma$ .

Søjle 1 og 2 er nulvektoren, og søjle 3 er $\neq$ nulvektoren.

Dvs. søjle 3 er basis for $image(L)$.

Søjle 3 er identisk med $\gamma_2$ .

**Konklusion:** basis for $image(L)$ er $\underline{\underline{\gamma_2}}$ elller $\underline{\underline{2 + Z - Z^2}}$

# Opgave 6

Givet følgende reelle system af differentialligninger:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Er det givne system af differentialligninger homogent eller inhomogent?

b) Beregn systemets fuldstændige reelle løsning.

## Svar

***a)***

Differentialligningssystemet er **homogent**, da der ikke er en 'højreside'.

Hvis systemet skulle være inhomognet, så skulle der på højre side været tillagt en vektor med 2 koordinater.

***b)***

Egenværdierne for matricen $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ bestemmes ud fra det karakteristiske polynomium:

$$p(Z) = det\left(\begin{bmatrix} 2-Z & 1 \\ 5 & -2-Z \end{bmatrix}\right) = (2-Z)\cdot(-2-Z) - 5\cdot 1 = -4 - 2\cdot Z + 2\cdot Z + Z^2 - 5 = Z^2 - 9$$

$$p(Z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = 9 \Leftrightarrow Z = \pm 3$$

Der er således 2 reelle rødder, og dermed egenværdier.

Egenvektorerne skal bestemmes:

Med egenværdi 3:

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 5 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$ som egenvektor kan anvendes $(1, 1)$ , da søjle 1 = - søjle 2.

Med egenværdi -3:

$$\begin{bmatrix} 2-(-3) & 1 \\ 5 & -2-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$ som egenvektor kan anvendes $(1, -5)$

Theorem 12.18 i eNote 12 kan anvendes.

**Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet er altså:**

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$ **, hvor** $t, c_1, c_2 \in R$