MC Python eksamen Mat1a E23

Af **Steen Toft Jørgensen**

In [ ]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

Opgave 1

Lad matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hvilket af nedenstående tal angiver determinanten af $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

In [ ]:
```
A=Matrix([[2,-1,3],[1,3,0],[0,7,-2]])
A
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
B=Matrix([[1,0,0],[0,2,0],[0,0,3]])
B
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
(A*B).det()
```

Out[ ]: 42

Vælg en svarmulighed

- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -21$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 21$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -42$
- ☒ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 42$

Opgave 2

Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ være en invertibel matrix, og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ være en søjlevektor.
Hvilken søjlevektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ er en løsning til ligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

In [ ]:
```
A=Matrix([[1,-1],[0,2]])
b=Matrix([4,12])
A,b
```

Out[ ]: $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} \right)$

In [ ]:
```
linsolve((A,b))
```

Out[ ]: $\{(10,\ 6)\}$

Vælg en svarmulighed

- ☒ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix}$

Opgave 3

Givet andengradspolynomiet:

$$p(z) = 3z^2 - 6z + 6 \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Hvilket af nedenstående svarmuligheder angiver polynomiets diskriminant d og en af polynomiets rødder r?

In [ ]:
```
z=symbols('z')
```

In [ ]:
```
p=3*z**2-6*z+6
```

```
p
```

Out[ ]: $3z^2 - 6z + 6$

In [ ]:
```
d=(-6)**2-4*3*6
d
```

Out[ ]: -36

In [ ]:
```
roots(p)
```

Out[ ]: $\{1 - i : 1,\ 1 + i : 1\}$

Vælg en svarmulighed

- ○ $d = -6i, r = 1 - i$
- ○ $d = 6i, r = 1 + i$
- ○ $d = 0, r = 1 + i$
- ○ $d = -36, r = i - 1$
- ☒ $d = -36, r = 1 - i$

Så svaret er: **d=-36 og r=1-i**

Opgave 4

Betragt den reelle differentialligning:

$f'(t) = \frac{1}{t} f(t) + t$ hvor $t > 0$.

Hvilket af nedenstående udtryk er en partikulær løsning til differentialligningen?

In [ ]:
```
f=Function('f')
t=symbols('t',real=True)
```

In [ ]:
```
DiffLign=Eq(diff(f(t),t),1/t*f(t)+t)
DiffLign
```

Out[ ]: $\frac{d}{dt} f(t) = t + \frac{f(t)}{t}$

In [ ]:
```
dsolve(DiffLign,f(t))
```

Out[ ]: $f(t) = t\left(C_1 + t\right)$

In [ ]:
```
expand(_)
```

Out[ ]: $f(t) = C_1 t + t^2$

Vælg en svarmulighed

- ○ $f(t) = t^2 + ce^t \;,\; t > 0 \,, c \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = ce^t + 1 \;,\; t > 0 \,, c \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = t^2 - 1 \;,\; t > 0$
- ⊗ $f(t) = t^2 \;,\; t > 0$
- ○ $f(t) = t(t^2 + t) \;,\; t > 0$

c1*t er den fudlstændige homogene løsning.
t^2 er så en mulig **partikulær** løsning.

Opgave 5

Betragt den reelle andenordens differentialligning:

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0$$

Hvilket af nedenstående udtryk er *IKKE* en løsning til differentialligningen?

In [ ]:
```
f=Function('f')
t=symbols('t',real=True)
```

In [ ]:
```
DiffLign=Eq(diff(f(t),t,2)-6*diff(f(t),t)+9*f(t),0)
DiffLign
```

Out[ ]: $$9f(t) - 6\frac{d}{dt}f(t) + \frac{d^2}{dt^2}f(t) = 0$$

In [ ]:
```
dsolve(DiffLign,f(t))
```

Out[ ]: $f(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{3t}$

In [ ]:
```
expand(_)
```

Out[ ]: $f(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$

Vælg en svarmulighed

- ○ $f(t) = e^{3t}(t-1)\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = 0\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = te^{3t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = cos(3t) + sin(3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = 4e^{3t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

Mulighed 1 kan fås med c1=-1 og c2=1.

Mulighed 2 kan fås med c1=0 og c2=0.

Mulighed 3 kan fås med c1=0 og c2=1.

Mulighed 4 kan ikke fås med valg af c1 og c2.

Mulighed 5 kan fås med c1=4 og c2=0.

Opgave 6

Lad matricen $\mathbf{A}$ være givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

I hvilket af nedenstående udtryk er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$?

In [ ]:
```
A=Matrix([[2,3,5],[0,0,-2],[0,-2,0]])
A
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
A.eigenvects()
```

Out[ ]:

$$\left[\left(-2,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right),\ \left(2,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Egenvektorerne er således udspændt af (-2,1,1) og (1,0,0).

Vælg en svarmulighed

- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Mulighed 4 kan fås ved at v1=5*(1,0,0) og v2=(-2,1,1).

In [ ]:
```
A*Matrix([5,0,0])
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
A*Matrix([-2,1,1])
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Opgave 7

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ være en matrix.

Lad $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning givet ved: $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$.

Det oplyses at $L_{\mathbf{A}}$ har egenværdierne: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$
med tilhørende egenrum:

$$E_{\lambda_1} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) , \ E_{\lambda_2} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) , \ E_{\lambda_3} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Angiv hvilken af følgende matricer der er matricen $\mathbf{A}$.

In [ ]:
```
vLv=diag(1,-1,2)
vLv
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
eIDv=Matrix([[0,1,0],[1,0,1],[-1,0,1]]).T
eIDv
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
eLe=eIDv*vLv*eIDv.inv()
eLe
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\0 & 1 & 0\\-\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
A=eLe
A
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\0 & 1 & 0\\-\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Vælg en svarmulighed

- ○ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- ○ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

- ○ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

- ○ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- ○ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$