Eksamen december 2024, Mat1a

af **Steen Toft Jørgensen**

In [223…
```
from sympy import *
init_printing()
```

Opgave 1

Givet andengradsligningen:

$$3z^2 - 6z + 12 = 0$$

Hvilket af følgende komplekse tal er en løsning til ligningen?

Forklaring 1

In [224…
```
z=symbols('z')
```

In [225…
```
roots(3*z**2-6*z+12)
```

Out[225…

$$\left\{1 - \sqrt{3} i : 1, \ 1 + \sqrt{3} i : 1\right\}$$

Beregner modulus og argument for de 2 rødder:

In [226…
```
abs(1-sqrt(3)*I),arg(1-sqrt(3)*I)
```

Out[226…

$$\left(2, \ - \frac{\pi}{3}\right)$$

In [227…
```
abs(1+sqrt(3)*I),arg(1+sqrt(3)*I)
```

Out[227…

$$\left(2, \ \frac{\pi}{3}\right)$$

Dvs. $2 \cdot e^{-\pi/3 \cdot i}$ er en løsning.

- [ ] Ingen af de viste svar er løsning til ligningen.
- [x] $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$
- [ ] $z = 2e^{\pi i}$
- [ ] $z = -6e^{12i}$
- [ ] $z = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$
- [ ] $z = 12e^{-\frac{\pi}{2}i}$
- [ ] $z = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$

Opgave 2

Lad $p(Z)$ være et polynomium af grad 4.

$$p(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + a_4 Z^4$$

Der oplyses følgende:
1) Alle koefficienterne a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 er reelle.
2) 2 er rod i $p(Z)$ med multiplicitet 2.
3) $1 + i$ er rod i $p(Z)$.
4) $p(1) = 7$.

Hvilke to tal angiver værdierne af a_0 og a_3?

Forklaring 2

Da koefficienterne er **reelle** tal, så er rødderne komplekst konjugerede.
Rødderne er derfor: 2, 2, 1+i, 1-i.
Polynomiet p(Z) kan så faktoropløses:

In [228…
```
a,Z=symbols('a,Z')
```

In [229…
```
p=a*(Z-2)**2*(Z-(1+I))*(Z-(1-I))
p
```

Out[229…

$$a(Z-2)^2\,(Z-1-i)\,(Z-1+i)$$

In [230…
```
solve(Eq(p.subs(Z,1),7),a)
```

Out[230…

$$[7]$$

In [231…
```
p.subs(a,7)
```

Out[231…

$$7(Z-2)^2\,(Z-1-i)\,(Z-1+i)$$

In [232…
```
expand(_)
```

Out[232…

$$7Z^4-42Z^3+98Z^2-112Z+56$$

Hermed kan aflæses, at a_0=56 og a_3=-42.

- [x] $a_0 = 56, a_3 = -42$
- [ ] $a_0 = -6, a_3 = 8$
- [ ] $a_0 = 7, a_3 = -6$
- [ ] $a_0 = -77, a_3 = 33$
- [ ] $a_0 = 2, a_3 = 7$
- [ ] $a_0 = 2, a_3 = 1 + i$
- [ ] Det rigtige svar er ikke blandt valgmulighederne

Opgave 3

Lad funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være givet ved:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1 \\ 2 & \text{for } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) & \text{for } n \geq 3 \end{cases}$$

Hvilket af følgende tal angiver $f(5)$?

Forklaring 3

Definerer funktionen f(n):

In [233…
```
n=symbols('n')
```

In [234…
```
def f(n):
    if n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 2
    else:
        return 3*f(n-1)-f(n-2)
```

In [235…
```
f(5)
```

Out[235…

34

Så svaret er, at f(5)=34.

- [x] $f(5) = 34$
- [ ] $f(5) = 26$
- [ ] $f(5) = 5$
- [ ] $f(5) = 1$
- [ ] $f(5) = 13$
- [ ] $f(5) = 15$
- [ ] Det rigtige svar er ikke blandt de viste muligheder.

Opgave 4

Lad $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning på formen:

$L(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ hvor den reelle 3×3 matrix er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Det oplyses:

$$L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad L(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hvilke to tal er de rigtige elementer i matricen $\mathbf{A}$?

Forklaring 4

Der gælder, at matricen A har 3 egenværdier: -2, 1, 3.

Og de tilhørende egenvektorer (basis for egenrummene) er de 3 angivne vektorer.

Matricen A er således diagonaliserbar.

$D=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$ eller $A=Q\cdot D\cdot Q^{-1}$

Q består af de 3 egenvektorer som søjler.

D har de 3 egenværdier i diagonalen.

In [236…
```
D=diag(-2,1,3)
D
```

Out[236…

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In [237…
```
Q=Matrix([[1,1,-1],[1,-1,1],[1,2,-1]]).T
Q
```

Out[237…

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In [238…
```
Q*D*Q**(-1)
```

Out[238…

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ -\frac{3}{2} & 8 & \frac{17}{2} \\ \frac{3}{2} & -5 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Hermed kan man aflæse, at a_{11}=-1/2 og a_{32}=-5.

- ○ $a_{11} = \frac{5}{2}$, $a_{32} = 2$
- ○ $a_{11} = \frac{1}{2}$, $a_{32} = \frac{3}{2}$
- ○ Det rigtige svar er ikke blandt valgmulighederne
- ○ $a_{11} = -2$, $a_{32} = 3$
- ● $a_{11} = -\frac{1}{2}$, $a_{32} = -5$
- ○ $a_{11} = \frac{17}{2}$, $a_{32} = -\frac{3}{2}$
- ○ $a_{11} = 1$, $a_{32} = 1$

Opgave 5

Givet et polynomium $p(t) = at + b$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$.
Betragt en andenordens differentialligning på formen:

$$f''(t) + 2f'(t) - 8f(t) = p(t)$$

Desuden oplyses at $f_0(t) = -t + 5$ er en partikulær løsning til differentialligningen.
Hvilket af nedenstående udtryk angiver en partikulær løsning til differentialligningen $f_p(t)$, samt værdierne af a og b?

Forklaring 5

In [239…
```
y=Function('y')
t,a,b=symbols('t,a,b',real=True)
```

In [240…
```
EQ=Eq(diff(y(t),t,2)+2*diff(y(t),t)-8*y(t),a*t+b)
EQ
```

Out[240…

$$-8y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = at + b$$

In [241…
```
L=dsolve(EQ,y(t))
L
```

Out[241…

$$y(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} - \frac{at}{8} - \frac{a}{32} - \frac{b}{8}$$

In [242…
```
L.rhs
```

Out[242…

$$C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} - \frac{at}{8} - \frac{a}{32} - \frac{b}{8}$$

Den partikulære del $-\frac{at}{8} - \frac{a}{32} - \frac{b}{8}$ skal være a·t+b.
Dvs -a/8 være -1, og -a/32-b/8=5.

In [243…
```
solve(Eq(-a/S(8),-1),a)
```

Out[243…

$[8]$

In [244…
```
a=8
```

In [245…
```
solve(Eq(-a/S(32)-b/S(8),5),b)
```

Out[245…

$[-42]$

Svaret er altså: a=8 og b=-42.
Løsningen fås med C_1=1 og C_2=0.

- [x] $f_p(t) = e^{-4t} - t + 5 \ , \ \ a = 8 \ , \ \ b = -42$
- [ ] $f_p(t) = e^{2t} + e^{-4t} - t + 5 \ , \ \ a = -1 \ , \ \ b = 5$
- [ ] $f_p(t) = e^{-2t} - t + 5 \ , \ \ a = -1 \ , \ \ b = 5$
- [ ] $f_p(t) = 2e^{2t} \ , \ \ a = 8 \ , \ \ b = -42$
- [ ] $f_p(t) = -t + 5 \ , \ \ a = -1 \ , \ \ b = 5$
- [ ] $f_p(t) = 4e^{4t} - t + 5 \ , \ \ a = 8 \ , \ \ b = -42$
- [ ] Det rigtige svar er ikke blandt valgmulighederne.

Opgave 6

Givet matricen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3\times3}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Hvilken af følgende vektorer er ikke en egenvektor for matricen ?

Forklaring 6

Finder egenvektorer:

In [246...
```
A=Matrix([[-1,4,4],[0,7,8],[0,-4,-5]])
A
```

Out[246...

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

In [247...
```
A.eigenvects()
```

Out[247…

$$\left[\left(-1,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(3,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Skal finde en vektor, som **ikke** er en egenvektor!

En egenvektor skal enten skrives som en linearkombination af (1,0,0) og (0,-1,1), eller være proportional med (-1,-2,1).

In [248…

```
E1=Matrix([[1,0,0],[0,-1,1]]).T
E1
```

Out[248…

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

In [249…

```
E2=Matrix([-1,-2,1])
E2
```

Out[249…

$$\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Tester de 6 muligheder mht. egenvektor:

In [250…

```
linsolve((E1,Matrix([2,-3,3])))
```

Out[250… $\{(2,\ 3)\}$

In [251…

```
linsolve((E1,Matrix([3,-1,1])))
```

Out[251… $\{(3,\ 1)\}$

In [252…

```
linsolve((E1,Matrix([-1,1-1])))
```

Out[252… $\{(-1,\ 0)\}$

In [253…

```
linsolve((E1,Matrix([-1,-2,1])))
```

Out[253… $\emptyset$

In [254…

```
linsolve((E2,Matrix([-1,-2,1])))
```

Out[254… $\{(1,)\}$

In [255…

```
linsolve((E1,Matrix([1,-2,1])))
```

Out[255… $\emptyset$

In [256…

```
linsolve((E2,Matrix([1,-2,1])))
```

Out[256… $\emptyset$

In [257…

```
linsolve((E1,Matrix([3,6,-3])))
```

Out[257… $\emptyset$

In [258…

```
linsolve((E2,Matrix([3,6,-3])))
```

Out[258… $\{(-3,)\}$

Man ser, at kun (1,-2,1) **ikke** er en egenvektor!

- ○ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ● $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ○ Alle vektorerne på siden er egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$.
- ○ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Opgave 7

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ være givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvilket af nedenstående tal angiver følgende determinant:

$$D = \det((\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{A}^{-1})$$

Forklaring 7

In [259…

```
A=Matrix([[4,3,2,1],[3,4,3,2],[2,3,4,3],[1,2,3,4]])
A
```

Out[259…

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Kan direkte opskrive D:

In [260…

```
D=((A.T+A**2)*A**(-1)).det()
D
```

Out[260…

161

Svaret på determinanten er således 161.

- ○ $D = 20$
- ● $D = 161$
- ○ Det rigtige svar er ikke blandt valgmulighederne.
- ○ $D = -110$
- ○ $D = 203$
- ○ $D = -20$
- ○ $D = 103$

Opgave 8

Betragt det reelle ligningssystem:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7$$
$$-x_1 + x_3 = -5$$

Hvilket af nedenstående udtryk angiver den fuldstændige løsning til ligningssystemet?

Forklaring 8

Opskriver lisningssystemet og løser det:

In [261…
```
A=Matrix([[1,1,3,1],[-1,0,1,0]])
A
```

Out[261…
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [262…
```
b=Matrix([7,-5])
b
```

Out[262…
$$\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

In [263…
```
linsolve((A,b))
```

Out[263... $\{(\tau_0 + 5,\ -4\tau_0 - \tau_1 + 2,\ \tau_0,\ \tau_1)\}$

Løsningen er altså (5,2,0,0)+τ_0·(1,-4,1,0)+τ_1·(0,-1,0,1)

Løsningsmulighed nr. 1 passer med svar 1, hvis τ_0=t_2 og τ_1=t_1 !!

Man ser, at der er 2 frie parametre.
Derfor udgår løsningsmulighederne nr. 3, 5 og 6.
Tilbage er løsningsmulighederne nr. 1, 2, 4 og 7.

Da (5,2,0,0) er en partikulær løsning, så udgår løsningsmulighed nr. 7, da den løsning er homogen.
Tilbage er løsningsmulighederne nr. 1, 2 og 4.
Løsningsmulighed nr. 2 er tæt på. Passer med homogene del, men den partikulære løsning (7,-5,0,0) dur ikke!

In [264...
```
A*Matrix([7,-5,0,0])
```

Out[264... $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

In [265...
```
_==b
```

Out[265...   False

- [x] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

- [ ] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

- [ ] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- [ ] Ingen af de viste udtryk angiver den fuldstændige løsning.

- [ ] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

- [ ] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t_1 \in \mathbb{R}$$

- [ ] $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$