Håndregning eksamen december 2024, Mat1a, DTU

restart : *with*(*LinearAlgebra*) :

Opgave 1)

a) Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn:

$$(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q).$$

b) Er det logiske udsagn $(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q)$ logisk ækvivalent med det logiske udsagn $P \wedge (\neg Q)$?

Svar 1)

NB: resultatet kan se forskelligt ud alt afhængigt at ***valgt rækkefølge*** *for T og F !*

a)

Sandhedstavle for det logiske udsagn: $(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q)$:

P	Q	$Q \Leftrightarrow P$	$\neg(Q \Leftrightarrow P)$	$\neg Q$	$(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F

b)

Sandhedstavle for det logiske udsagn: $P \wedge (\neg Q)$:

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
T	T	F	F
F	T	F	F
T	F	T	T
F	F	T	F

Konklusion: Da de 2 ssandhedstavler er ens, så er de 2 udtryk **logisk ækvivalente**!

Opgave 2)

Givet polynomiet $p(Z) = 2Z^3 - 2Z^2 - 8Z - 12$ i $\mathbb{C}[Z]$. Det oplyses at 3 er rod i dette polynomium.

a) Skriv polynomiet $p(Z)$ som produkt af et polynomium af grad et og et polynomium af grad to.

b) Find samtlige rødder i $p(Z)$ i $\mathbb{C}$. Rødderne skal angives på rektangulær form.

Svar 2)

a)

Da 3 er rod i polynomiet $p(Z)$, så kan $Z - 3$ divideres op i polynomiet $p(Z)$.

Divisionen udføres i hånden, og giver: $2 \cdot Z^2 + 4 \cdot Z + 4$.
https://www.emathhelp.net/calculators/algebra-1/polynomial-long-division-calculator/?numer=2*Z%5E3-2*Z%5E2-8*Z-12&denom=Z-3

Konklusion: polynomiet $p(Z)$ kan faktoriseres som $\boldsymbol{p(Z) = (Z-3) \cdot (2 \cdot Z^2 + 4 \cdot Z + 4)}$

b)

Det vides allerede, at 3 er rod i $p(Z)$. De øvrige rødder findes i 2. grads ligningen $2 \cdot Z^2 + 4 \cdot Z + 4 = 0$

Diskriminanten: $\mathrm{D} = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 16 - 32 = -16$
Der er således 2 komplekst konjugerede rødder:

$$Z = \frac{-B \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2 \cdot A} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm i \cdot \sqrt{16}}{4} = \frac{-4 \pm i \cdot 4}{4} = -1 \pm i$$

Dette er rektangulær form: $a + i \cdot b$

Konklusion: rødderne i $p(Z)$ er $3, -1 + i, -1 - i$

Maple-tjek

$solve(2 \cdot Z^3 - 2 \cdot Z^2 - 8 \cdot Z - 12 = 0) = 3, -1 - \mathrm{I}, -1 + \mathrm{I}$

$simplify\left(\frac{2 \cdot Z^3 - 2 \cdot Z^2 - 8 \cdot Z - 12}{Z - 3}\right) = 2 Z^2 + 4 Z + 4$

$solve(2 \cdot Z^2 + 4 \cdot Z + 4 = 0) = -1 + \mathrm{I}, -1 - \mathrm{I}$

Opgave 3)

Betragt for $a \in \mathbb{C}$ følgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Besvar følgende spørgsmål:

a) Beregn $\mathbf{A}^2$ og $\mathbf{A}^3$.

b) Vis ved hjælp af induktion efter n at $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Svar 3)

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3 \cdot a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Konklusion: $\underline{\underline{A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}}}$ og $\underline{\underline{A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3 \cdot a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}}}$

Maple-tjek

$$A := \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} :$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2\,a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3\,a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

b)

Induktionsbevis

Lad $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

Skal bevise, at $A^n = \begin{bmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ for $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

Starttrinnet: n=2

Fra a) vides at $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$

Indsætter $n = 2$ i højresiden af formlen:: $\begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a^{2-1} \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$

Konklusion: formlen gælder altså når $n=2$.

Induktionstrinnet: antag at formlen gælder for n, bevis så at formlen gælder for n+1.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{bmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^n\cdot a & a^n\cdot 1+n\cdot a^{n-1}\cdot a \\ 0 & a^n\cdot a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a^{n+1}} & \boldsymbol{(n+1)\cdot a^n} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a^{n+1}} \end{bmatrix}$$

NB: Induktionantagelsen er brugt ved 2. lighedstegn.

Indsætter $n+1$ i formlen, som så lyder: $A^{n+1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a^{n+1}} & \boldsymbol{(n+1)\cdot a^n} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a^{n+1}} \end{bmatrix}$

Det ses, at de 2 udtryk er ens.

Hermed er formlen bevist ved induktion.

Opgave 4)

Der gives følgende matrix i $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Find en basis for **B**'s kerne.

b) Find en basis for **B**'s søjlerum.

c) Betragt den lineære afbildning $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ givet ved $L(\mathbf{v})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}$. Er den lineære afbildning L surjektiv?

Svar 4

a)

Laver rækkeoperationer for at finde kernen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kernen er 1-dimensional.
Kernen er givet ved $(-3\cdot t, 2\cdot t, t)=t\cdot(-3, 2, 1)$
Konklusion: Basis for kernen er $\underline{\underline{(-3, 2, 1)}}$

b)

Ud fra rækkeoperationerne i spørgsmål a) kan man se, at billedrummet (søjlerummet!) er givet ved søjle 1 og 2 fra matrix B.
Konklusion: basis for billedrummet (søjlerummet!) er $\underline{\underline{(1, 2, 2)}}$ og $\underline{\underline{(3, 1, -1)}}$

c)

Afbildningen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er **ikke surjektiv**, da billedrummet kun er 2-dimensionalt underurm i det 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$.

Opgave 5)

Lad $V = \mathbb{R}^3$ og lad

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

være den ordnede standardbasis for V. Ydermere vælges følgende ordnede basis for V:

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

a) Angiv basisskiftematricen ${}_\beta[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_\gamma$.

b) Beregn basisskiftematricen ${}_\gamma[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_\beta$.

Svar 5)

a)

Basisskiftematricen $\beta ID \gamma$ kan opstilles straks, da søjlerne består af vektorerne i basen γ.

$$\beta ID \gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

Basisskiftematricen $\gamma ID \beta$ er den inverse matrix til basisskiftematricen $\beta ID \gamma$.

Dvs. $\gamma ID \beta = \beta ID \gamma^{-1}$

Beregner den inverse matrix af $\beta ID \gamma$. Sammenstiller $\beta ID \gamma$ med identitetsmatricen af størrelse 3x3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hermed gælder at $\beta ID \gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Konklusion: $\gamma D\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Maple-tjek

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Opgave 6)

Givet følgende system af førsteordens ODEs:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + 2f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_1(t) + f_2(t) \end{cases}$$

a) Er det givne differentialligningssystem homogent eller inhomogent?

b) Beregn differentialligningenssystemets fuldstændige reelle løsning.

c) Bestem en løsning til det givne differentialligningssystem som opfylder begyndelsesbetingelserne $f_1(0) = 3$ og $f_2(0) = 5$.

Svar 6)

a)

Differentialligningssystemet er **homogent**, da det kan skrives på standard matrixformen:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

b)

For at finde den fuldstændige reelle løsning opstilles det karakteristiske polynomium for matricen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se eksempel 12.2.6 i noterne.

$$p(Z) = det(A - Z \cdot I_2) = det\left(\begin{bmatrix} 1-Z & 2 \\ 2 & 1-Z \end{bmatrix}\right) = (1-Z)\cdot(1-z) - 2\cdot 2 = (1-Z)^2 - 4$$

Egenværdier (rødder):

$p(Z) = 0 \Leftrightarrow (1-Z)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (1-Z)^2 = 4 \Leftrightarrow 1 - Z = \pm 2 \Leftrightarrow Z = 1 \pm 2 \Leftrightarrow Z = 3 \vee Z = -1$

Der er således 2 reelle rødder, nemlig -1 og 3.

Egenvektorer:

Z=-1

$A - Z\cdot I_2 = A - (-1)\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Det ses straks, at egenvektorerne er givet ved $(t, -t) = t\cdot(1, -1)$.
Vælger $v_{-1} = (1, -1)$

Z=3

$A - Z\cdot I_2 = A - 3\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Det ses straks, at egenvektorerne er givet ved $(t, t) = t\cdot(1, 1)$
Vælger $v_3 = (1, 1)$

I følge **sætning 12.2.5** er den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet:

$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = c_1\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot e^{-1\cdot t} + c_2\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{3\cdot t}$ hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

eller

$f_1(t) = c_1\cdot e^{-t} + c_2\cdot e^{3\cdot t}$

$f_2(t) = -c_1\cdot e^{-t} + c_2\cdot e^{3\cdot t}$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Maple-tjek

$dsolve(\{f_1'(t) = f_1(t) + 2\cdot f_2(t), f_2'(t) = 2\cdot f_1(t) + f_2(t)\}) =$

$\{f_1(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-t}, f_2(t) = c_1\, e^{3t} - c_2\, e^{-t}\}$

NB: Samme som håndregningen, blot er konstanterne c_1 og c_2 ombyttede!

c)

Skal bestemme en betinget løsning.
Kravet er, at $f_1(0) = 3$ og $f_2(0) = 5$

Indsætter i løsningen fra spørgsmål b):

$3 = c_1\cdot e^{-0} + c_2\cdot e^{3\cdot 0} \Leftrightarrow \mathbf{3 = c_1 + c_2}$ og $5 = -c_1\cdot e^{0} + c_2\cdot e^{3\cdot 0} \Leftrightarrow \mathbf{5 = -c_1 + c_2}$

Adderes de 2 ligninger, så får man: $8 = 2\cdot c_2 \Leftrightarrow \mathbf{c_2 = 4}$

Indsætter dette i 1. ligning: $3 = c_1 + 4 \Leftrightarrow \mathbf{c_1 = -1}$

Konklusion: den betingede løsning er $\underline{\underline{f_1(t) = -e^{-t} + 4\cdot e^{3\cdot t}}}$ og $\underline{\underline{f_2(t) = e^{-t} + 4\cdot e^{3\cdot t}}}$

Maple-tjek

$dsolve(\{f_1'(t) = f_1(t) + 2\cdot f_2(t), f_2'(t) = 2\cdot f_1(t) + f_2(t), f_1(0) = 3, f_2(0) = 5\}) =$

$\{f_1(t) = 4\, e^{3t} - e^{-t}, f_2(t) = 4\, e^{3t} + e^{-t}\}$

Passer med håndregningen!