Håndregning reeksamen maj 2024, Mat1a, DTU

restart :

Opgave 1)

a) Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn: $(P \Leftrightarrow R) \vee Q$.

b) Er følgende logiske udsagn $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ en tautologi?

Svar 1)

NB: resultatet kan se forskelligt ud alt afhængigt at valgt rækkefølge for T og F !

a)

Sandhedstavle for det logiske udsagn: $(P \Leftrightarrow R) \vee Q$:

P	R	Q	$P \Leftrightarrow R$	$(P \Leftrightarrow R) \vee Q$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$
T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$

b)

Sandhedstavle for det logiske udsagn: $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$:

P	$\neg P$	Q	$\neg P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T

Konklusion: Da det logiske udtryk altid er sandt (T), så er udsagnet en **tautologi**.

Opgave 2)

Givet den binome ligning $z^4 = -4$, angiv den løsning som ligger i første kvadrant i den komplekse talplan. Løsningen skal gives på rektangulær form.

Svar 2)

Sætning 4.4.1 om løsning af en biniom ligning anvendes:

Sætning 4.4.1

Lad $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ligningen $z^n = w$ har præcis n forskellige løsninger, nemlig:

$$z = \sqrt[n]{|w|}e^{i\left(\frac{\arg(w)}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)},\ p \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Her betegner $\sqrt[n]{|w|}$ det entydige, positive, reelle tal, der opfylder $\left(\sqrt[n]{|w|}\right)^n = |w|$.

$z^4 = -4$ har den fuldstændige løsning: $z = \sqrt[4]{|-4|}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{arg(-4)}{4}+p\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{4}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+p\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+p\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$
hvor $p \in \{0, 1, 2, 3\}$

Løsningen med $p = 0$ ligger i 1. kvadrant (hvor både realdel og imaginær del er positive).
Løsningen er:

$$\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}+i\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{2}{2}+i\cdot\frac{2}{2}$$
$$= 1+i$$

Konklusion: $\underline{\underline{z = 1 + i}}$

Maple-tjek

$(1+I)^4 = -4$

Opgave 3)

For alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ defineres

$$t_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}.$$

Besvar nu følgende spørgsmål:

a) Beregn t_2 og t_3.

b) Vis med induktion efter n at $t_n = \frac{n-1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Svar 3)

a)

$$t_2 = \sum_{k=2}^{2}\left(\frac{1}{(k-1)\cdot k}\right) = \frac{1}{(2-1)\cdot 2} = \frac{1}{1\cdot 2}$$ dvs. $\boldsymbol{t_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}}$

$$t_3 = \sum_{k=2}^{3}\left(\frac{1}{(k-1)\cdot k}\right) = \frac{1}{(2-1)\cdot 2}+\frac{1}{(3-1)\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$ dvs.
$\boldsymbol{t_3 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}}$

b)

Induktionsbevis

Formel, som skal bevises: $t_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) = \frac{n-1}{n}$

Starttrinnet: n=2

$t_2 = \frac{1}{2}$ er beregnet ovenfor.

$\frac{n-1}{n} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ beregnes med formlen.

Konklusion: formlen gælder altså når $n = 2$.

Induktionstrinnet: antag at formlen gælder for n, bevis så at formlen gælder for n+1.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) + \frac{1}{((n+1)-1) \cdot (n+1)} =$$

$$t_n + \frac{1}{((n+1)-1) \cdot (n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$\frac{n^2-1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n^2}{n \cdot n + 1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = t_{n+1} \quad \textbf{OK}\checkmark$$

NB: Induktionantagelsen er brugt ved 2. lighedstegn.

Hermed er formlen bevist ved induktion.

Maple-tjek

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1) \cdot k} \right) \text{ assuming } n, \textit{integer} = \frac{-1+n}{n}$$

Opgave 4)

Der gives følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

a) Lad W være underrummet af det reelle vektorrum $\mathbb{R}^3$ udspændt af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Find en basis for underrummet W.

b) Angiv en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke er i W. Gør rede for dit svar.

Svar 4

a)

Vektorerne samles i en matrix. Hver vektor er en søjle.
Og der laves rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for underrummet U som er udspændt af de 3 vektorer er: v_1 og v_2.

Konklusion: en mulig basis for W givet ved: $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Maple-tjek

$$LinearAlgebra[ReducedRowEchelonForm]\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

Tager en 'tilfældig' kandidat, f.eks. $v_3 = (0, 0, 1)$.
Tjekker, at de 3 vektorer v_1, v_2 og v_3 udspænder hele $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De 3 vektorer er altså lineært uafhængige og udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
Derfor ligger $v_3 = (0, 0, 1)$ ikke i underrummet W, som er udspændt af v_1 og v_2.

Opgave 5)

Lad $V = \mathbb{R}^3\}$. Der vælges følgende ordnede basis for V:

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

For en lineær afbildning $L : V \to V$ oplyses følgende afbildningsmatrix:

$$_\gamma[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beregn afbildningsmatricen $_\mathbf{e}[L]_\mathbf{e}$, hvor **e** betegnes den standard ordnede basis for $\mathbb{R}^3$.

Svar 5)

Basisskiftematrix $eID\gamma$ kan opstilles straks, da søjlerne består af vektorerne i basen γ.

$$eID\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Har brug for den inverse basisskiftematrix $\gamma IDe = eID\gamma^{-1}$.

Beregner den inverse matrix af λIDe :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \hookrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Hermed $\gamma IDe = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Afbildningsmatricen eLe kan nu beregnes:

$$eLe = eID\gamma \cdot \gamma L\gamma \cdot \gamma IDe = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{13}{4} & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Konklusion: afbildningsmatricen $eLe = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{13}{4} & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}$

Maple-tjek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{13}{4} & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 6)

Givet følgende andenordens differentialligning:

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 4e^t.$$

a) Er den givne differentialligning homogen eller inhomogen?

b) Det oplyses at $f(t) = e^t$ er løsning til den givne differentialligning. Beregn differentialligningens fuldstændige reelle løsning.

Svar 6)

a)

Differentialligningen er **inhomogen**, da der står en funktion på højre side af lighedstegnet.
Den tilsvarende homogene differentialligning er: $f''(t) - 6 \cdot f'(t) + 9 \cdot f(t) = 0$

b)

Klart at e^t er en partikulær løsning, da $f(t) = e^t = f'(t) = f''(t)$. Så bliver venstre side:
$e^t - 6 \cdot e^t + 9 \cdot e^t = 4 \cdot e^t$

Definition 12.3.2 anvendes:

Definition 12.3.2
Polynomiet

$$Z^2 + a_1 Z + a_0$$

kaldes *det karakteristiske polynomium* for ODE'en

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0.$$

Karakteristiske polynomium: $Z^2 - 6 \cdot Z + 9$
Finde rødderne i polynomiet:
Diskriminanten $D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$
Dvs. der er tale om en dobbeltrod: $-\dfrac{B}{2 \cdot A} = -\dfrac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3$
Tjek: $(Z-3)^2 = Z^2 + 9 - 6 \cdot Z$ ✓

Formel 12.17 anvendes i tilfældet af en dobbeltrod:

$$c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t e^{\lambda t} = c_1 \cdot e^{\left(\frac{-a_1}{2}\right)t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\left(\frac{-a_1}{2}\right)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12.17}$$

Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning er: $c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3 \cdot t}$

Konklusion: Den fuldstændige løsning til den givne inhomogene differentialligning er:
$c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3 \cdot t} + e^t$ hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Maple-tjek

$dsolve\left(f''(t) - 6 \cdot f'(t) + 9 \cdot f(t) = 4 \cdot e^t\right) = f(t) = e^{3t} c_2 + e^{3t} t c_1 + e^t$