Reeksamen maj 2024, Mat1a

af **Steen Toft Jørgensen**

In [104…

```
from sympy import *
init_printing()
```

Opgave 1

Givet et sæt af to vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Hvilken af nedenstående vektorer skal tilføjes sættet for at det udspænder hele $\mathbb{R}^3$?

Vælg en svarmulighed

- En sådan vektor findes ikke blandt de mulige svar!
- $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Forklaring 1

Stabler alle vektorer op som søjler i en matrix M.

In [105…

```
M=Matrix([[3,-1,2],[1,1,-2],[0,-4,8],[7,-1,2],[4,0,0],[1,2,3]]).T
M
```

Out[105…

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 8 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In [106…

```
M.rref(pivots=false)
```

Out[106…

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hermed ses, at vektoren <1,2,3> er det rigtige svar, da den sammen med de 2 givne vektorer v1 og v2 er lineært uafhængige, og derfor udgør en basis for det 3-dimensionelle vektorum R^3.

Så svaret er den sidste mulighed:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Opgave 2

Givet er matricerne $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hvilken af nedenstående $\mathbf{B}$ -matricer er en løsning til matrixligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$?

Vælg en svarmulighed

- En sådan matrix findes ikke blandt de mulige svar!
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Forklaring 2

In [107…

```
A=Matrix([[1,2],[0,-2]]);C=Matrix([[4,-4],[-4,6]])
A,C
```

Out[107…

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

Tester de 4 mulige B-matricer:

In [108…

```
A*Matrix([[0,-2],[-2,3]]),A*Matrix([[1,-2],[-2,-3]]),A*Matrix([[1,2],[2,-3]]),A*
```

Out[108…

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

Den eneste mulighed for B-matricen er den sidste matrix.
Så svaret er:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Opgave 3

Givet er matricen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

For hvilken værdi af $k \in \mathbb{R}$ er determinanten af matricen lig med nul ($\det(\mathbf{A}) = 0$)?

Vælg en svarmulighed

- [x] $k = -\frac{3}{2}$
- [ ] $k = \frac{3}{2}$
- [ ] $k = -\frac{2}{3}$
- [ ] $k = \frac{2}{3}$
- [ ] Den søgte værdi findes ikke blandt svarmulighederne

Forklaring 3

In [109…
```
k=symbols('k',real=true)
```

In [110…
```
A=Matrix([[1,-1,2],[k,0,3],[-2,1,0]])
A
```

Out[110…

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [111…
```
A.det()
```

Out[111…

$2k + 3$

In [112…
```
solveset(Eq(_,0))
```

Out[112…

$$\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Determinanten er således 0, netop når k=-3/2.
Så svaret er den første mulighed:

- [x] $k = -\frac{3}{2}$

Opgave 4

Givet et andengradspolynomium med reelle koefficienter:

$$p(z) = az^2 - bz + c \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Det oplyses at polynomiet har roden $z_0 = 1 - 2i$ desuden oplyses at $p(0) = 10$.

Hvilket af nedenstående svarmuligheder angiver polynomiet p ?

Vælg en svarmulighed

- ○ $p(z) = -2z^2 + 4z - 10$
- ○ $p(z) = z^2 - 2z + 5$
- ● $p(z) = 2z^2 - 4z + 10$
- ○ Ingen af svarmulighederne angiver et polynomium der opfylder betingelserne!
- ○ $p(z) = -z^2 + 4z + 5$

Forklaring 4

Da polynomiet har reelle koefficienter, så er rødderne komplekst konjugerede. Dvs. 1+2i er også en rod.
Så kan p(z) faktoriseres som: K·(z-(1-2·i))·(z-(1+2·i)).

In [113…
```
K,z=symbols('K,z')
```

In [114…
```
p=K*(z-(1-2*I))*(z-(1+2*I))
p
```

Out[114…

$$K(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$$

In [115…
```
p=p.expand()
p
```

Out[115…

$$Kz^2 - 2Kz + 5K$$

Når p(0)=10, så er c=10.
Så 5K=c=10, dvs. K=2

In [116…
```
p.subs(K,2)
```

Out[116…

$$2z^2 - 4z + 10$$

Så svaret er tredie mulighed:

● $p(z) = 2z^2 - 4z + 10$

Opgave 5

Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ være en matrix, og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ være en søjlevektor.

Hvilken af nedenstående søjlevektorer angiver resultatet af matrixproduktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$?

Vælg en svarmulighed

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -16 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -14 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -14 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Resultatet af matrixproduktet findes ikke blandt svarmulighederne!

Forklaring 5

In [117…

```
A=Matrix([[2,-1,3],[5,0,-2]]);b=Matrix([-2,-1,3])
A,b
```

Out[117…

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

In [118…

```
A*b
```

Out[118…

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Så svaret er den første mulighed:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Opgave 6

Et reelt differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \text{ hvor } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Det oplyses at den fuldstændige løsning til systemet er givet ved:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad t, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Hvilken af nedenstående muligheder angiver en egenværdi med tilhørende egenvektor for matricen $\mathbf{A}$?

Vælg en svarmulighed

- $\lambda = -1$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $\lambda = -1$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = -2$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$
- $\lambda = -2$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- Ingen af svarmulighederne angiver en egenværdi med tilhørende egenvektor med de søgte egenskaber!

Forklaring 6

Anvender **korollar 12.2.4** i note 12.

> **Korollar 12.2.4**
>
> Antag, at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er en diagonalisérbar matrix. Mere præcist, lad $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ være en ordnet basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$, der svarer til egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Så har det homogene system i Ligning (12.4) den fuldstændige løsning
>
> $$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Så kan egenværdierne aflæses på eksponenterne på e^{-2t} og e^{-t}. Egenværdierne er -2 og -1.

Egenvektorerne er de viste vektorer, som står foran e^{-2t} og e^{-t}.
Dvs. egenvektor for egenværdien -2 er (2,5), mens egenvektor for egenværdien -1 er (-1,1).
NB: disse egenvektorer kan evt. ganges med en konstant.

Muligheder: enten λ=-1 og v=(-1,1) , eller λ=-2 og v=(2,5)
Ingen af dem passer umiddelbart. Men egenvektoren (-1,1) kan ganges med -2, og bliver så (2,-2).

Så passer første mulighed: **λ=-1 og v=(2,-2)**, dvs.

$$\lambda = -1 \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Opgave 7

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ være en matrix givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Lad $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning givet ved: $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$.

Hvilken af nedenstående muligheder angiver kernen for afbildningen $L_{\mathbf{A}}$?

Vælg en svarmulighed

- $$\ker(L_{\mathbf{A}}) = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$
- $$\ker(L_{\mathbf{A}}) = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$$
- $$\ker(L_{\mathbf{A}}) = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$$
- $$\ker(L_{\mathbf{A}}) = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$
- Ingen af de ovennævnte mulige svar angiver kernen for $L_{\mathbf{A}}$

Forklaring 7

In [119…

```
A=Matrix([[1,2,1],[-1,2,1],[0,8,4]])
A
```

Out[119…

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

In [120…

```
A.nullspace()
```

Out[120…

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Ganger lige svaret med 2 for at opnå hele tal.

In [121…

```
2*_[0]
```

Out[121…

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kernen har altså vektoren (0,-1,2) som basis, dvs. ker(L_A)=span{(0,-1,2)}.

Så svaret er dem første mulighed:

$$\ker(L_{\mathbf{A}}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$