Håndregning test-eksamen nov. 2023, Mat1a, DTU

restart :

Opgave 1

Er de logiske udsagn $(\neg(P \vee Q)) \Rightarrow P$ og $P \vee Q$ logisk ækvivalente?

Svar

Der opstilles sandhedstavler for de 2 udsagn.

Teori: eNote 01, definition 1.4, definition 1.5, definition 1.7.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	P (gentagelse)	$\neg(P \vee Q) \Rightarrow P$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F

Man ser, at de 2 sandhedstavler (lyserøde) er identiske, derfor er de 2 udsagn logisk ækvivalente.

Opgave 2

Beregn rødderne i polynomiet $Z^3 + 27$. Rødderne ønskes angivet på rektangulær form.

Svar

Skal løse ligningen $Z^3 + 27 = 0$. Dette er en binomial ligning.

Teori: eNote 04, theorem 4.13.

Der er 3 løsninger i $\mathbb{C}$. De ligger som eger i et cykelhjul.

$$Z^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow Z^3 = -27 \Leftrightarrow Z = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i \cdot \left(arg(-27) + p \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)} \Leftrightarrow Z = 3 \cdot e^{i \cdot \left(\pi + p \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)} \Leftrightarrow Z = 3 \cdot \left(\cos\left(\pi + p \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\pi + p \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p \in \{0, 1, 2\}$.

$$Z = 3 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) \vee Z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}\right)\right) \vee Z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Z = 3 \cdot (-1 + i \cdot 0) \vee Z = Z = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee Z = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$Z = -3 \vee Z = \frac{3}{2} \pm i \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Maple-tjek

$solve(Z^3 + 27 = 0, Z) = -3, \frac{3}{2} - \frac{3\,I\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{3\,I\sqrt{3}}{2}$

Opgave 3

En følge af tal $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ defineres rekursivt på følgende måde:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 1, \\ 2s_{n-1} + 2 & \text{hvis } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Bestem s_1, s_2 og s_3.

b) Vis ved hjælp af induktion efter n at $s_n = 2^n - 2$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Svar a)

Anvender direkte rekursions formlen:

$s_1 = 0$

$s_2 = 2 \cdot s_1 + 2 = 2 \cdot 0 + 2 = 2$

$s_3 = 2 \cdot s_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

Svar: $\mathbf{s_0 = 0, s_1 = 2, s_2 = 6}$

Svar b)

Teori: eNote 05, theorem 5.3, corollary 5.4.

Induktionsbevis.

Formlen lyder: $s_n = 2^n - 2$.

1) start:

Tjekker formlen for n=1:

$2^1 - 2 = 2 - 2 = 0$ som også er s_1 ifølge spørgsmål a).

OK

2) antag at formlen gælder for $n - 1$, vis at den så gælder for n:

Med definitionen og rekursions fomlen:

$s_n = 2 \cdot s_{n-1} + 2 = 2 \cdot (2^{n-1} - 2) + 2 = 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2 + 2 = 2^n - 4 + 2 = 2^n - 2$ som ønsket.

De farvede steder indikerer, hvor rekursions antagelsen om gyldighed for $n - 1$ er anvendt.

OK

Hermed er fprmlen $s_n = 2^n - 2$ bevist ved induktion.

Opgave 4

Givet følgende lineære ligningsystem over $\mathbb{R}$ i de ubekendte x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -1 \end{cases}.$$

a) Er det givne lineære ligningssystem homogent eller inhomogent?

b) Lad $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ være to løsninger til det givne lineære ligningssystem. Er $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ også løsning til systemet?

Svar a)

Teori: eNote 06, theorem 6.10, definition 6.12.

Da højre siden i ligningssystemet ikke er nulvektoren, så er ligningsystemet **inhomogent**.

Svar b)

Ligningssystemet kan opskrives på matrixform som: $A \cdot x = b$.

Der gælder så for de 2 løsninger v og w, at $A \cdot v = b$ og at $\underline{A} \cdot w = b$.
Der medfører så, at $A \cdot (v - w) = A \cdot v - A \cdot w = b - b = \overline{0}$ altså nulvektoreren.
Derfor er $v - w$ løsning til det tilsvarense homogene ligningssystem: $A \cdot x = \overline{0}$,
og altså **ikke løsning til det given inhomogene ligningssystem**.

Opgave 5

Givet følgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a) Vis at det karakteristiske polynomium af matricen $\mathbf{A}$ er $p_{\mathbf{A}}(Z) = -Z^3 + 9Z^2 - 8Z$.

b) Det oplyses at vektorerne

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer af matricen **A**. Hvad er deres tilhørende egenværdier?

Svar a)

Teori: eNote 11, theorem 11.6.

Det karakteristsiske polynomium beregnes som:

$$p_A(Z) = det(A - Z \cdot Id) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} - Z \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = det\left(\begin{bmatrix} 1-Z & 0 & 0 \\ 4 & -Z & 1 \\ 3 & 0 & 8-Z \end{bmatrix} \right)$$

Determinanten udvikles efter 1. række:

$$p_A(Z) = (1-Z) \cdot det(\ ) \begin{bmatrix} -Z & 1 \\ 0 & 8-Z \end{bmatrix} = (1-Z) \cdot (-Z \cdot (8-Z) - 0 \cdot 1) =$$

$$(1-Z) \cdot (-8 \cdot Z + Z^2) = -8 \cdot Z + 8 \cdot Z^2 + Z^1 - Z^3 = -Z^3 + 9 \cdot Z^2 - 8 \cdot Z$$

Af udregningen ses straks, at egenværdierne er: 1, 0 og 8.

Dvs. $\boldsymbol{P_A(Z) = -Z^3 + 9 \cdot Z^2 + 8 \cdot Z}$

Svar b)

Teori: eNote 11, definition 11.1 og 11.2.

Indsætter de 2 vektorer:

$$A \bullet v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix}$ er en egenvektor svarende til **egenværdien 1**.

$$A \bullet v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 64 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ er en egenvektor svarende til **egenværdien 8**.

NB: stemmer med spørgsmål a), hvor egenværdierne blev fundet til 0, 1 og 8.

Maple-tjek

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} : v_1 := \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix} : v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} :$$

$$1\ expand(LinearAlgebra[Determinant](A - Z \cdot LinearAlgebra[IdentityMatrix](3))) = -Z^3 + 9Z^2 - 8Z$$

$$A \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -25 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$8 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$LinearAlgebra[Eigenvalues](A, output = list) = [0, 8, 1]$$

Opgave 6

Lad V være et reelt vektorrum af dimension to. Det oplyses at for to ordnede baser β og γ for V opfylder basisskiftematricen ${}_\gamma[\mathrm{id}]_\beta$:

$${}_\gamma[\mathrm{id}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem nu matricen ${}_\beta[\mathrm{id}]_\gamma$.

Svar

Teori: eNote 10, lemma 10.37.

De 2 basisskiftematricer er **inverse** matricer. Begge af størrelse 2 x 2.

Beregning af den inverse matrix til ${}_\gamma[id]_\beta$:

Der opstilles en 2 x 4 matrix, hvor de 2 første søjler er ${}_\gamma[id]_\beta$ og de 2 sidste søjler er identitets matricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nu laves rækkeoperationer:

Trækker række 1 fra række 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lægger række 2 til række 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da identitets matricen nu står til ventre, så er den inverse matrix til højre.

Konklusion: ${}_{\beta}[id]_{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Maple-tjek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 7

Givet følgende differentialligning: $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 2t$.

a) Vis at funktionen $f(t) = t + 3/2$ er løsning til den givne differentialligning.

b) Beregn differentialligningens fuldstændige løsning.

Svar a)

Indsætter $f(t)$ i differentialligningens venstre side, og rerducerer:

$$\left(t + \frac{3}{2}\right)'' - 3\cdot\left(t + \frac{3}{2}\right)' + 2\cdot\left(t + \frac{3}{2}\right) = 0 - 3\cdot 1 + 2\cdot t + 3 = 0 - 3 + 2\cdot t + 3 = 2\cdot t$$

Dvs. løsningen passer i differentialligningen.

Svar b)

Teori: eNote 12, definition 12.23, theorem 12.24, corollary 12.26, section 12.4.

Ifølge spørgsmål a) så er $f(t) = t + \frac{3}{2}$ en partikulær (enkel) løsning til den **inhomogene** differentialligning.

Derfor skal den fuldstændige løsning til det tilsvarende **homogene** differentialligningssystem bestemmes:

$f''(t) - 3\cdot f'(t) + 2\cdot f(t) = 0$

Danner det karakteristiske polynomium: $Z^2 - 3\cdot Z + 2$

Diskriminanten: $\mathrm{D} = B^2 - 4\cdot A\cdot C = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Da $\mathrm{D} > 0$, er der 2 **reelle** rødder: $Z = \frac{-B \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2\cdot A} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$ dvs. 1 eller 2.

Samtlige løsninger til det homogene differentialligning er så:

$f(t) = c_1\cdot \mathrm{e}^{1\cdot t} + c_2\cdot \mathrm{e}^{2\cdot t} = c_1\cdot \mathrm{e}^{t} + c_2\cdot \mathrm{e}^{2\cdot t}$ hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er: $\underline{\underline{f(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot t} + t + \frac{3}{2}}}$ **hvor** $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Maple-tjek

$dsolve(f''(t) - 3 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = 2 \cdot t) = f(t) = \frac{3}{2} + t + \mathrm{e}^{2\,t}\, c_1 + \mathrm{e}^{t}\, c_2$