MC Python test-eksamen

Steen Toft Jørgensen

In [ ]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

Opgave 1

Spørgsmål 1

Givet er følgende lineære ligningssystem over $\mathbb{R}$ i de tre ubekendte x_1, x_2, og x_3:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{cases} .$$

Hvilke af nedenstående mængder angiver den fuldstændige løsning til systemet?

In [ ]:
```
A=Matrix([[0,1,1],[1,-2,1]])
A
```

Out[ ]: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

In [ ]:
```
b=Matrix([1,4])
b
```

Out[ ]: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

In [ ]:
```
linsolve((A,b))
```

Out[ ]: $\{(6 - 3\tau_0,\ 1 - \tau_0,\ \tau_0)\}$

$$(1)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$(4)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$(5)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Mulighed (4) og (5) udelukkes pga. (6,1,1).

Mulighed (2) udelukkes, da der ikke er nogen fri parameter.

Vektoren foran tau i svar er (-3,-1,1). Derfor udelukkes mulighed (3).

I mulighed (1) er vektoren (3,1,-1), som er proportional med mit (-3,-1,1).

Derfor er det korrekte svar (1).

$$(1)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Opgave 2

Spørgsmål 2

Givet er:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af følgende udtryk er identisk med udtrykket $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot \mathbf{v}$?

In [ ]:

```
A=Matrix([[1,2],[3,4]])
B=Matrix([[1,0,-1],[2,1,0]])
```

```
v=Matrix([1,0])
A,B,v
```

Out[ ]: $\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$

In [ ]:
```
((A*B).transpose())*v
```

Out[ ]: $\begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$

eller

In [ ]:
```
((A*B).T)*v
```

Out[ ]: $\begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$

$$(1) \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix}5 & 11\\2 & 4\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$$

Det korrekte svar er (1).

$$(1) \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Opgave 3

Spørgsmål 3

Givet er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ er matricen $\mathbf{A}$ invertibel?

In [ ]:
```
a=symbols('a')
```

In [ ]:
```
A=Matrix([[1,2,9],[1,a,1],[0,-1,a]])
A
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{bmatrix}$$

En matrix er invertibel, hvis den er kvadratisk og har determinant forskellig fra 0.
A er kvadratisk.
Derfor undersøges hvornår determinanten er 0.

In [ ]:
```
A.det()
```

Out[ ]: $a^2 - 2a - 8$

In [ ]:
```
solve(A.det())
```

Out[ ]: $[-2,\ 4]$

eller

In [ ]:
```
solve(Eq(A.det(),0))
```

Out[ ]: $[-2,\ 4]$

(1) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$

(2) $a \in \{-2, 4\}$

(3) $a \in \mathbb{R}$

(4) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(5) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Det korrekte svar er altså (1).

(1) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$

Opgave 4

Spørgsmål 4

Det er givet, at $Q(z)$ er et polynomium af grad 2 med rødderne 1 og 3. Givet er

$$P(z) = Q(z) \cdot (z^3 - 5z^2 - z + 5),$$

og det oplyses, at $P(z)$ har roden $z = -1$. Hvad er alle rødderne og deres multipliciteter af P?

Undersøger rødderne i polynmiet til højre: z^3-5*z^2-z+5.

Kaldet dette polynomium for R.

In [ ]:
```
z=symbols('z')
```

In [ ]:
```
R=z**3-5*z**2-z+5
```

In [ ]:
```
roots(R)
```

Out[ ]: $\{-1 : 1,\ 1 : 1,\ 5 : 1\}$

eller

In [ ]:
```
solve(R)
```

Out[ ]: $[-1,\ 1,\ 5]$

Der er altså 3 rødder i R: -1, 1 og 5. Alle 3 med multiplicitet 1.

Polynomiet Q er af 2. grad med rødderne 1 og 3.

Derfor er der ikke andre rødder i Q, og de 2 rødder har multiplicitet 1 hver i Q.

Polynomiet P har altså 4 rødder: -1,1,3 og 5.

Multipliciteten af -1 er 1 (fra R), mulipliciteten af 1 er 2 (fra R og Q), multipliciteten af 3 er 1 (fra Q), multipliciteten af 5 er 1 (fra R).

(1) $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 3$ med multiplicitet 1, $z_3 = 5$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 1$ med multiplicitet 2.

(2) $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 1$ med multiplicitet 1, og $z_3 = 3$ med multiplicitet 1.

(3) $z_1 = -1$ med multiplicitet 2, $z_2 = 1$ med multiplicitet 2, og $z_3 = 3$ med multiplicitet 1.

(4) $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 3$ med multiplicitet 1, $z_3 = 5$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 1$ med multiplicitet 1.

(5) $z_1 = 0$ med multiplicitet 1, $z_2 = 1$ med multiplicitet 1, $z_3 = 3$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 5$ med multiplicitet 1.

Det korrekte svar er altså (1).
Multipliciteten af -1 er 1 (fra R), mulipliciteten af 1 er 2 (fra R og Q), multipliciteten af 3 er 1 (fra Q), multipliciteten af 5 er 1 (fra R).

(1) $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 3$ med multiplicitet 1, $z_3 = 5$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 1$ med multiplicitet 2.

Opgave 5

Spørgsmål 5

Lad

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Vælg matricer Λ og $\mathbf{V}$ således at $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \Lambda$.

In [ ]:
```
B=Matrix([[4,-1,-1],[6,-3,-1],[-6,5,3]])
B
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Skal beregne en basis bestående af egenvektorer. Søjlevektorerne udgør matricen V.

In [ ]:
```
B.eigenvects()
```

Out[ ]:
$$\left[\left(-2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(4, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

Da der er 3 lineært uafhængige egenvektorer, så kan V opskrives.
Ligeledes kan diagonalmatricen T opskrives med de tilhørende egenværdier i diagonalen i samme rækkefølge!

In [ ]:
```
V=Matrix([[0,-1,1],[1,1,1],[-1,-1,1]]).transpose()
V
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
T=diag(-2,2,4)
T
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Test:

In [ ]:
```
V**(-1)*B*V
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Svarmuligheder:

$$(1)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(5) Der findes ingen matricer $\mathbf{B}$ og Λ, som opfylder den givne sammenhæng.

Når man ser svarmulighederne, så skal V omskrives! Man skal vælge egenvektorer smartere!

Min (0,1,-1) skal ganges med -1, så det bliver (0,1,-1) som 3. søjlevektor.
(1,1,1) skal være 2. søjlevektor.
Min (-1,-1,1) skal ganges med -1, så det bliver (1,1,-1) som 1. søjlevektor.

Nu ombyttes egenværdierne også, så de kommer i rækkefølgen 4, 2 og -2.

In [ ]:
```
V=Matrix([[1,1,-1],[1,1,1],[0,1,-1]]).transpose()
V
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
V**(-1)*B*V
```

Out[ ]:
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Svarmulighederne:

$$(1)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(5) Der findes ingen matricer $\mathbf{B}$ og Λ, som opfylder den givne sammenhæng.

Det korrekte svar er mulighed (5) ??????

(5) Der findes ingen matricer $\mathbf{B}$ og Λ, som opfylder den givne sammenhæng.

Der er ingen af de 4 første som passer!!
Men det er ikke korrekt, for der findes en diagonalmatrix, blot ikke en af de viste !!!!!!

NB: Da (1)-(4) har samme V, kan man bare udregne V^(-1)*B*V og så se om man får en af de angivne diagonalmatricer.

Opgave 6

Spørgsmål 6

Lad V være et underrum i $\mathbb{R}[Z]$, og lad V være ydstyret med den ordnede basis $\alpha = (1, Z, Z^2)$. Om en lineær afbildning $f : V \to V$ oplyses følgende:

$$f(1) = 1 + Z,\ f(Z) = 1 - Z,\ \text{og}\ f(Z^2) = Z + Z^2.$$

Hvad er egenværdierne af denne afbildning?

Afbildningsmatricen kan direkte aflæses:

In [ ]:
```
F=Matrix([[1,1,0],[1,-1,0],[0,1,1]]).transpose()
F
```

Out[ ]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
F.eigenvals()
```

Out[ ]: $\{1:1,\ -\sqrt{2}:1,\ \sqrt{2}:1\}$

Der er 3 egenværdier: 1 og +/- kvadratrod(2).

Svarmuligheder:

(1) $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(2) $1, -1, 1$

(3) $-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(4) $\sqrt{2}, -1, 1$

(5) $-\sqrt{2}, 0, 1$

Det korrekte svar er mulighed (1).

(1) $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

Opgave 7

Spørgsmål 7

Et reelt differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses at $x(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$. Hvad er løsningen?

In [ ]:
```
y1=Function('y1')
y2=Function('y2')
t=symbols('t',real=True)
```

In [ ]:
```
Eq1=Eq(diff(y1(t),t),-1*y1(t)+3*y2(t))
Eq2=Eq(diff(y2(t),t),3*y1(t)-1*y2(t))
Eq1,Eq2
```

Out[ ]: $\left(\frac{d}{dt}y_1(t) = -y_1(t) + 3y_2(t),\ \frac{d}{dt}y_2(t) = 3y_1(t) - y_2(t)\right)$

Løser differentialligningssystemet med begyndelsesbetingelserne.

In [ ]:
```
dsolve((Eq1,Eq2),[y1(t),y2(t)],ics={y1(0):6,y2(0):0})
```

Out[ ]: $\left[y_1(t) = 3e^{2t} + 3e^{-4t},\ y_2(t) = 3e^{2t} - 3e^{-4t}\right]$

Svarmuligheder:

(1) $f_1(t) = 3e^{2t} + 3e^{-4t}$, $f_2(t) = 3e^{2t} - 3e^{-4t}$

(2) $f_1(t) = e^{2t} + 5e^{-4t}$, $f_2(t) = e^{2t} - e^{-4t}$

(3) $f_1(t) = 5e^{2t} + e^{-4t}$, $f_2(t) = 5e^{2t} - 5e^{-4t}$

(4) $f_1(t) = 6e^{2t}$, $f_2(t) = 0$

(5) $f_1(t) = e^{2t}$, $f_2(t) = e^{-4t}$

Det korrekte svar er IGEN mulighed (1).

(1) $f_1(t) = 3e^{2t} + 3e^{-4t}$, $f_2(t) = 3e^{2t} - 3e^{-4t}$

Opgave 8

Spørgsmål 8

Et polynomium er givet ved

$$P(Z) = Z^2 + aZ + b\ ,\ a, b \in \mathbb{C}.$$

Det oplyses at $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 2i$ er rødder i P. Hvad er værdierne af a og b?

Polynomiet P er af 2. grad med 1 som koefficient til Z^2.
Derfor kan P faktoriseres som (Z-rod1)*(Z-rod2).

In [ ]:
```
Z,a,b=symbols('Z,a,b')
```

In [ ]:
```
P=(Z-(1+I))*(Z-(2*I))
P
```

Out[ ]: $(Z - 2i)(Z - 1 - i)$

In [ ]:
```
P2=expand(P)
P2
```

Out[ ]: $Z^2 - Z - 3iZ - 2 + 2i$

In [ ]:
```
collect(P2,Z)
```

Out[ ]: $Z^2 + Z(-1 - 3i) - 2 + 2i$

Dvs. a = -1-3*i og b = -2 +2*i

Svarmuligheder:

(1) $a = -3i - 1$, $b = -2 + 2i$

(2) $a = 1 + i$, $b = 2i$

(3) $a = 3i + 1$, $b = 2 - 2i$

(4) $a = 3i - 1$, $b = -2 + 2i$

(5) $a = -3i - 1$, $b = -2 - 2i$

Det korrekte svar er altså (1).

(1) $a = -3i - 1$, $b = -2 + 2i$