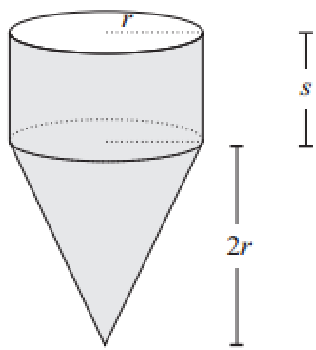
Opgave 15, STX A-niveau, 1. juni 2010

En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r, målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Tragten kan rumme 40 dm^3.



Fra formelsamling (Kegle)

h højde
r grundfladeradius

Krum overflade $\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$

Rumfang $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r, og gør rede for, at tragtens overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi(\sqrt{5} - \frac{4}{3}) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

b) Bestem r, således at tragtens overflade er mindst mulig, når $0 < r < 4$.

> $restart$

> $assume(r > 0), interface(showassumed = 0)$

$$0 \quad (1.1)$$

a)

> $h := 2 \cdot r$

$$h := 2\,r \quad (1.1.1)$$

> $Vcylinder := \pi \cdot r^2 \cdot s$

$$Vcylinder := \pi\, r^2\, s \quad (1.1.2)$$

> $Vkegle := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$Vkegle := \frac{2}{3}\,\pi\, r^3 \quad (1.1.3)$$

> $V := Vcylinder + Vkegle$

$$V := \pi\, r^2\, s + \frac{2}{3}\,\pi\, r^3 \quad (1.1.4)$$

> $s := solve(V = 40, s)$

(1.1.5)

$$s := -\frac{2}{3}\,\frac{\pi\,r^3 - 60}{\pi\,r^2} \qquad \mathbf{(1.1.5)}$$

Konklusion: cylinderens højde *s* som funktion af *r* er $\underline{\underline{s = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi\cdot r^3 - 60}{\pi\cdot r^2}}}$

> $Ocylinder := 2\cdot\pi\cdot r\cdot s$

$$Ocylinder := -\frac{4}{3}\,\frac{\pi\,r^3 - 60}{r} \qquad \mathbf{(1.1.6)}$$

> $Okegle := \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + h^2}$

$$Okegle := \pi\,r^2\,\sqrt{5} \qquad \mathbf{(1.1.7)}$$

> $f := unapply(Ocylinder + Okegle, r)$:

Overfladearealet=

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi\cdot r^3 - 60}{r} + \pi\cdot r^2\cdot\sqrt{5} = -\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^2 - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{60}{r}\right) + \pi\cdot r^2\cdot\sqrt{5} = \pi\cdot r^2\cdot\sqrt{5} - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{4\cdot 60}{3\cdot r} = \pi\cdot\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\cdot r^2 + \frac{80}{r}$$

Konklusion: overfladearealet er altså givet ved forskriften $\underline{\underline{\mathrm{O}(r) = \pi\cdot\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\cdot r^2 + \frac{80}{r}}}$

b)

Overfladearealet ønskes mindst muligt, når $0 < r < 4$?

NB: giver begrænsningen $0 < r < 4$ overhovedet mening?

> $solve(\{s > 0, r > 0\}, r); allvalues(\%); evalf(\%)$

Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.

$$\{0 < r, r < RootOf(\pi\,\_Z^3 - 60, index = 1)\}$$

$$\left\{0 < r, r < \frac{60^{1/3}\,(\pi^2)^{1/3}}{\pi}\right\}$$

$$\{0. < r, r < 2.673009234\} \qquad \mathbf{(1.2.1)}$$

Omskrivning af udtryk: $\frac{60^{1/3}\cdot(\pi^2)^{1/3}}{\pi} = \frac{\sqrt[3]{60\cdot\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{60\cdot\pi^2}{\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$

> $evalf\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right)$

$$2.673009235 \qquad \mathbf{(1.2.2)}$$

Hvad med *s*, når $r = 3$?

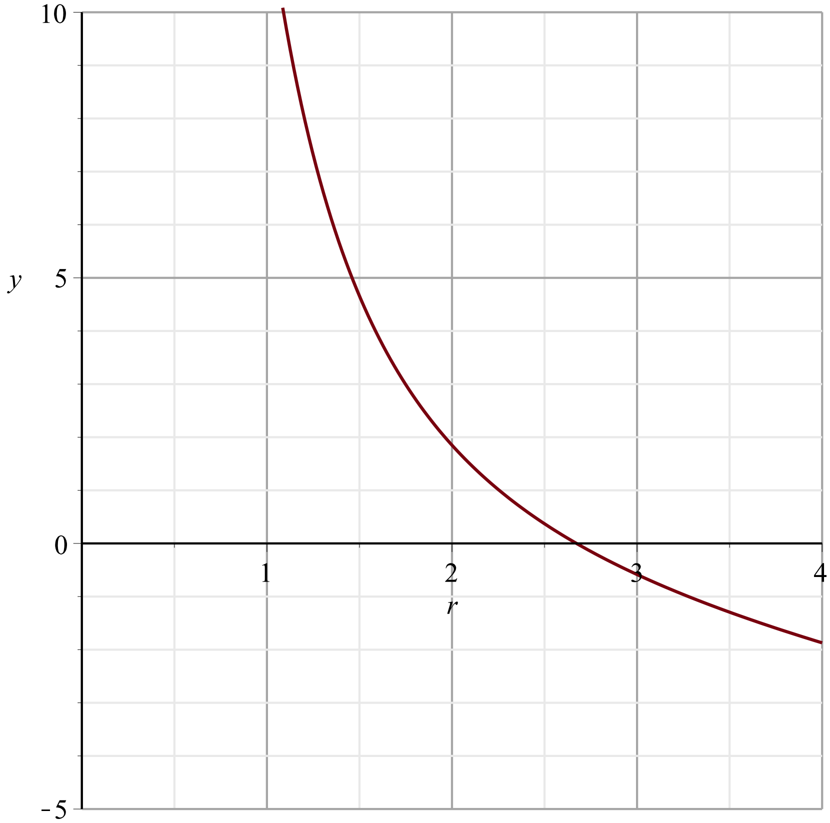
> $subs(r = 3, s); evalf(\%)$

$$-\frac{2}{27}\,\frac{27\,\pi - 60}{\pi}$$

$$-0.5852893949 \quad (1.2.3)$$

Når f.eks. $r = 3$ bliver $s \approx -0.585$ dvs. $s < 0$!!!

> $plot(s, r = 0..4, y = -5..10, gridlines)$

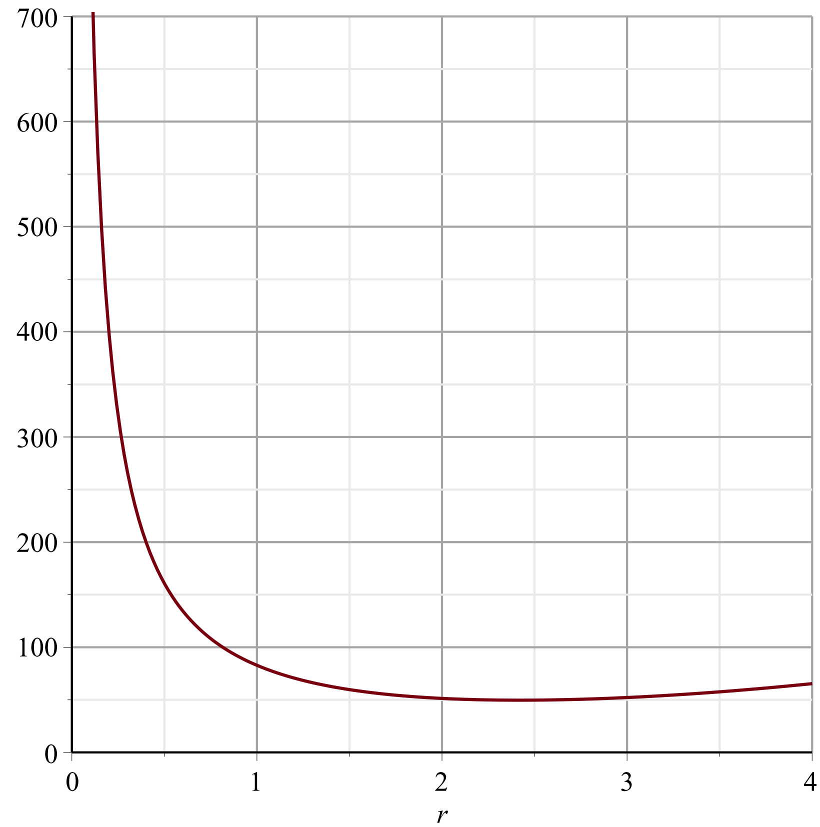


Det angivne område $0 < r < 4$ er altså en **fejl**.

Gyldighedsområdet er $0 < r < \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \approx 2.673$

<u>Det er rent held</u>, at løsningen $r = 2.416$ nedenfor ligger indenfor gyldighedsområdet !!!

> $plot(f(r), r = 0..4, gridlines)$



På grafen ser det ud til at minimum finder sted omkring $r \approx 2.5$

> $minimize(f(r), r, r = 0..4, location); evalf(\%)$

$$-\frac{2}{1305}\,\frac{12615^{2/3}\,\pi^{1/3}\left(\frac{360}{29}\sqrt{5}-\frac{1260}{29}\right)}{\left(3\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}+\frac{4}{841}\,\pi^{1/3}\,12615^{2/3}\left(3\sqrt{5}+4\right)^{2/3}\sqrt{5},\ \left\{\left[\left\{r=\frac{2}{29}\,\frac{12615^{1/3}\left(3\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}{\pi^{1/3}}\right\},\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{1305}\,\frac{12615^{2/3}\,\pi^{1/3}\left(\frac{360}{29}\sqrt{5}-\frac{1260}{29}\right)}{\left(3\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}+\frac{4}{841}\,\pi^{1/3}\,12615^{2/3}\left(3\sqrt{5}+4\right)^{2/3}\sqrt{5}\right]\right\}$$

$$49.66661667,\ \{[\{r = 2.416109814\}, 49.66661667]\} \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

> $rMIN1 := rhs(\%[2, 1, 1, 1])$

$$rMIN1 := 2.416109814 \quad \textbf{(1.2.5)}$$

alternativ:

> $solve(\{f'(r) = 0, r > 0, r < 4\}, r); evalf(\%)$

Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.

$$\left\{ r = \frac{2}{29} \frac{\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460 \right) \pi^2 \right)^{1/3}}{\pi} \right\}$$

$$\{r = 2.416109815\} \quad \textbf{(1.2.6)}$$

> $rMIN2 := rhs(\%[1])$

$$rMIN2 := 2.416109815 \quad \textbf{(1.2.7)}$$

Konklusion: overfladearealet er mindst, når $\underline{\underline{r \approx 2.416}}$