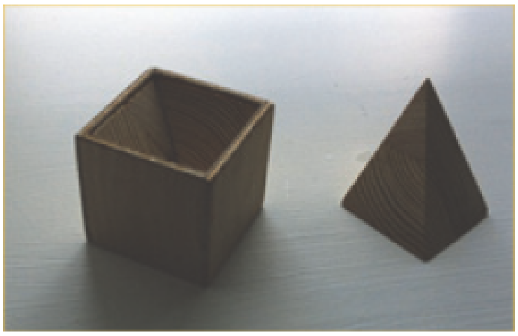
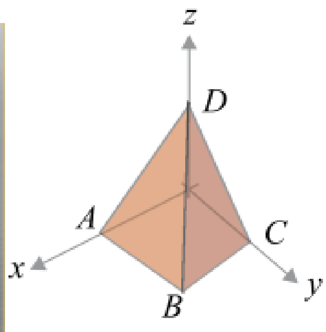
Eksamensopgave matematik A, 14/8-2013, opgave 10, spørgsmål b

I et stykke legetøj går det ud på at samle tre pyramider, så de danner en kube. Figuren viser en model af en af de tre pyramider.





$A(3,0,0)$
$B(3,3,0)$
$C(0,3,0)$
$D(0,0,3)$

a) Bestem ligningen for den plan α , som fladen ABD er del af.

Det oplyses, at den plan β , som fladen BCD er en del af, har ligningen

$$y+z=3 .$$

b) Bestem den spidse vinkel mellem fladen ABD og fladen BCD.

Spørgsmål b) er noget vrøvl!

Vinklen mellem de 2 flader ABD og BCD i pyramiden er stump. Det fornemmes på figuren. Den spidse vinkel, der tales om er et fatamorgana. Findes ikke i virkeligheden på figuren!

Der menes nok: "vinklen mellem planerne α og β".

restart
with(*Gym*) :

Vinkel mellem fladen ABD og fladen BCD

Der er tale om en **indre vinkel** i en rumlig figur.

Den indre vinkel findes som vinklen mellem de 2 normalvektorer,
når man sørger for, at den ene normalvektor går ud af figuren, og den anden går ind ad.

$A := \langle 3, 0, 0\rangle : B := \langle 3, 3, 0\rangle : C := \langle 0, 3, 0\rangle : D1 := \langle 0, 0, 3\rangle :$
$\overrightarrow{BA} := A - B : \overrightarrow{BD} := D1 - B : \overrightarrow{BC} := C - B :$

Udadgående normalvektor til ABD (i følge højrehåndregel for krydsprodukt):

$$\overrightarrow{n_{ABD}} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Indadgående normalvektor til BCD (i følge højrehåndregel for krydsprodukt):

$$\overrightarrow{n_{BCD}} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$vinkel\left(\overrightarrow{n_{ABD}}, \overrightarrow{n_{BCD}}\right) = 120.$$

eller:

$$invCos\left(\frac{\overrightarrow{n_{ABD}} \cdot \overrightarrow{n_{BCD}}}{len\left(\overrightarrow{n_{ABD}}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{BCD}}\right)}\right) = 120.$$

eller:

$$\frac{\overrightarrow{n_{ABD}} \cdot \overrightarrow{n_{BCD}}}{len\left(\overrightarrow{n_{ABD}}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{BCD}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Dvs. vinklen er eksakt 120°.

Konklusion: vinklen mellem fladen ABD og fladen BCD er 120°

Vinkel mellem planerne α og β

Man angiver normalt den spidse vinkel som løsningen.

$$180 - vinkel\left(\overrightarrow{n_{ABD}}, \overrightarrow{n_{BCD}}\right) = 60.$$

Konklusion: den spidse vinkel mellem planerne α og β er ca. 60°

Meningen fra opgavestillernes side var nok, at man skulle anvende de 2 ligninger for planerne α (som er beregnet i (a)) og β (som er givet i teksten),
og så aflæses normalvektorerne. Og derefter beregne vinklen mellem disse. Bliver den spids, så OK. Bliver den stump, så trækkes den fra 180°.