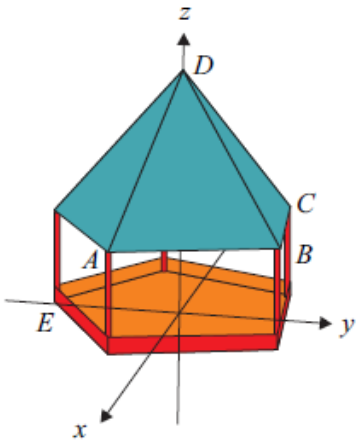
Eksamensopgave, STX A-niveau, 22. maj 2014, opgave 11, spørgsmål c



$A(24,-9,16)$
$B(15,20,16)$
$C(-15,20,16)$
$D(0,0,44)$
$E(0,-25,0)$

På figuren ses en model af et fuglehus indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på hver af de tre akser. Koordinaterne til nogle af fuglehusets hjørner er angivet på figuren.

a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder tagfladen ABD.

Det oplyses, at planen β, der indeholder tagfladen BCD, kan beskrives ved ligningen

$$\beta: \ 7y+5z-220=0.$$

b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne ABD og BCD.

c) Bestem afstanden fra punktet E til tagfladen BCD.

Uhensigtsmæssighed:

Spørgsmål c):

Menes der
"afstand fra *E* til planen β (som jo indeholder tagfladen *BCD*)" - som er let!
eller menes der faktisk
"afstand fra *E* til tagfladen *BCD*" - som er svært!

ANTAG: "afstand fra *E* til planen β (som jo indeholder

tagfladen *BCD*)"

I så fald er det en klassisk opgave med afstand fra et punkt til en plan!

```
> restart
```

```
> afstand := |7·(-25)+5·0-220| / sqrt(0^2+7^2+5^2); evalf(%)
```

$$afstand := \frac{395}{74}\sqrt{74}$$

$$45.91781730 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Konklusion: afstanden er ca. 45.9

ANTAG: "afstand fra *E* til tagfladen *BCD*"

Hvis projektionspunktet af *E* ned på β ligger **indenfor** tagfladen *BCD*, så er svaret ovenfor korrekt.

Hvis projektionspunktet af *E* ned på β ligger **udenfor** tagfladen *BCD*, så er svaret ovenfor ikke korrekt.
Så må mindste afstand findes på en af de 3 kanter!

```
> restart
```

```
> E := <0, -25, 0>
```

$$E := \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1)}$$

```
> β := 7·y+5·z-220=0
```

$$\beta := 7y + 5z - 220 = 0 \qquad \textbf{(2.2)}$$

Linie gennem *E* vinkelret på plan β, har planens normalvektor som retningsvektor:

```
> r := <0, 7, 5>
```

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.3)}$$

```
> l := E+t·r
```

$$l := \begin{bmatrix} 0 \\ 7t-25 \\ 5t \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.4)}$$

```
> subs({x=l[1], y=l[2], z=l[3]}, β)
```

$$74t - 395 = 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Skæring mellem den ortogonale linje og planen β giver projektionspunktet P:

```
> solve(%, t)
```

$$\frac{395}{74} \qquad \textbf{(2.6)}$$

> $P := subs(t = \%, l);\ evalf(\%)$

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{915}{74} \\ \frac{1975}{74} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 12.36486486 \\ 26.68918919 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.7)}$$

Argumentation for at projektionspunktet ligger <u>indenfor</u> tagfladen *BCD*:

Da x-koordinaten af P er 0, vil punktet ligge i yz-planen.
Punkterne B og C har x-koordinat på ±15, og samme y- og z-koordinat.
Punktet Q midt imellem B og C har så koordinaterne (0,20,16). Og dette punkt ligger i tagfladen BCD.
Punktet D har koordinaterne (0,0,44).
Derfor vil P ligge imellem punkterne D og Q .
Det betyder, at P ligger indenfor trekanten BCD.

Konklusion: afstanden fra punktet E til tagfladen BCD er altså givet ved afstanden fra E til planen β, dvs. ca. <u>45.9</u>

Illustration af projektionspunktet *P*'s beliggenhed

> $unprotect('D')$

> $B := \langle 15, 20, 16\rangle;\ C := \langle -15, 20, 16\rangle;\ \mathrm{D} := \langle 0, 0, 44\rangle$

$$B := \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

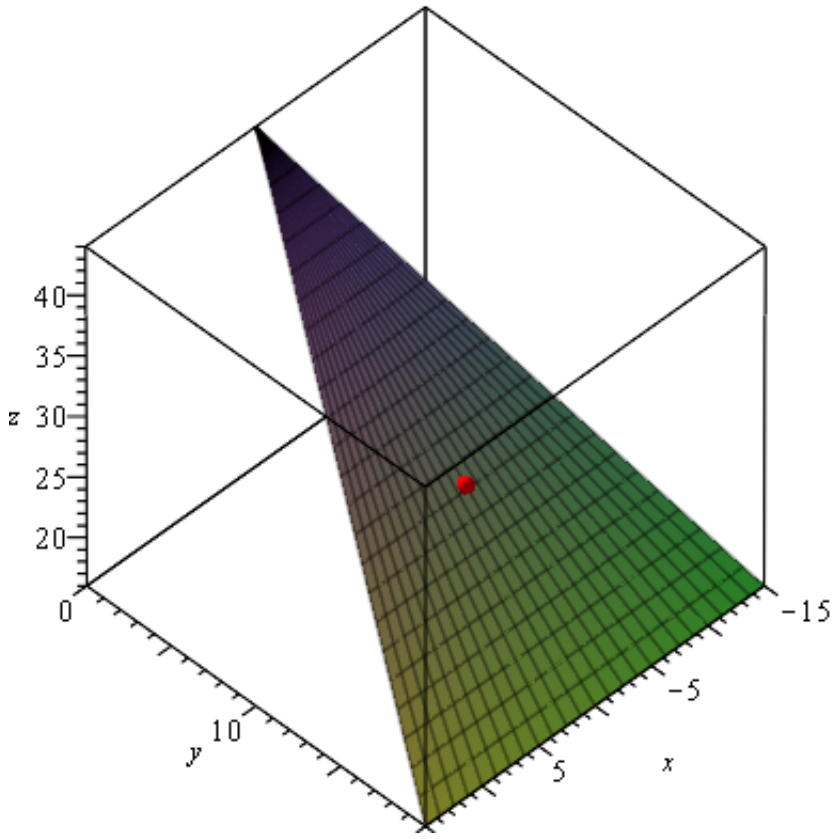
Parameterfremstilling for ΔBCD:

> $p := (s, t) \to s \cdot \mathrm{D} + (1 - s) \cdot (t \cdot B + (1 - t) \cdot C):$
> $p(s, t)$

(2.1.2)

$$\begin{bmatrix} (1-s)\ (30\,t-15) \\ 20-20\,s \\ 28\,s+16 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.2)}$$

```
> with(plots):
  trekant := plot3d(p(s,t), s=0..1, t=0..1, labels=[x,y,z], axes=box):
  punkt := pointplot3d([[P1,P2,P3]], symbol=solidsphere, color=red, symbolsize=20):
  display(trekant, punkt)
```



Minimering af afstand fra *E* til et punkt på tagfladen *BCD*

Parameterfremstillingen anvendes til at opstille udtryk for afstanden fra E til et generelt punkt på tagfladen BCD.
Afstanden udtrykkes som funktion af parametrene s og t :

```
> AFSTANDst := unapply(sqrt((E1-p(s,t)1)^2+(E2-p(s,t)2)^2+(E3-p(s,t)3)^2), (s, t)):
  'AFSTANDst'=AFSTANDst(s,t)
```

$$AFSTANDst = \sqrt{(1-s)^2\,(30\,t-15)^2+(-45+20\,s)^2+(-16-28\,s)^2} \quad \textbf{(2.2.1)}$$

I punktet med minimal afstand vil afstandsudtrykket have differentialkvotient = 0 efter begge variable s og t :

> $solve\left(\left\{\frac{d}{ds}\,AFSTANDst(s,t)=0,\ \frac{d}{dt}\,AFSTANDst(s,t)=0,\ s\geq 0,\ s\leq 1,\ t\geq 0,\ t\leq 1\right\}\right)$

$$\left\{s=\frac{113}{296},\ t=\frac{1}{2}\right\} \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

> $s0 := rhs(\textbf{(2.2.2)}[1]);\ t0 := rhs(\textbf{(2.2.2)}[2])$

$$s0 := \frac{113}{296}$$

$$t0 := \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

> $P := p(s0, t0)$

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{915}{74} \\ \frac{1975}{74} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

NB: samme punkt som fundet tidligere!

Parameterfremstilling for trekanten nede på gulvet, dvs. i definitionsområdet for x og y:

> $g := (s,t) \to \langle p(s,t)_1, p(s,t)_2, 0\rangle$:
> $'g(s,t)' = g(s,t)$

$$g(s,t) = \begin{bmatrix} (1-s)\ (30\,t-15) \\ 20-20\,s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

Afstanden fra et generelt punkt på planen β til punktet E udtrykt ved x og y :

> $solve\left(\left\{g(s,t)_1 = x,\ g(s,t)_2 = y\right\},\ \{s,t\}\right)$

$$\left\{s=1-\frac{1}{20}\,y,\ t=\frac{1}{6}\,\frac{4\,x+3\,y}{y}\right\} \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

> $sxy := rhs(\textbf{(2.2.6)}[1]);\ txy := rhs(\textbf{(2.2.6)}[2])$

$$sxy := 1-\frac{1}{20}\,y$$

$$txy := \frac{1}{6}\,\frac{4\,x+3\,y}{y} \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

Parameterfremstillingen anvendes til at opstille udtryk for afstanden fra E til et generelt punkt på tagfladen BCD.
Afstanden udtrykkes som funktion af parametrene x og y :

> $AFSTANDxy := unapply\left(\sqrt{\left(E_1-p(sxy,txy)_1\right)^2+\left(E_2-p(sxy,txy)_2\right)^2+\left(E_3-p(sxy,txy)_3\right)^2},\right.$

$(x, y)\Big)$:

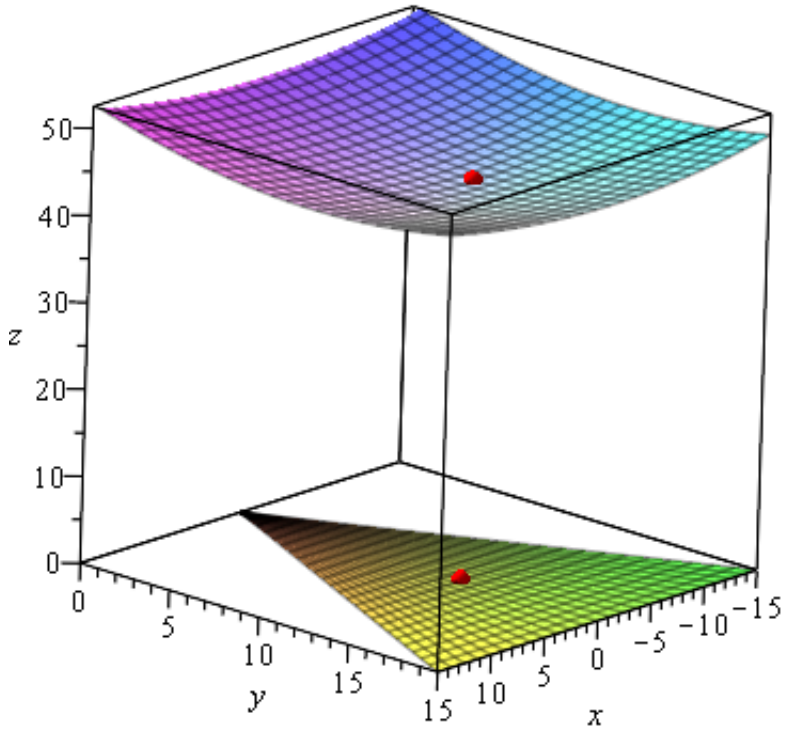
$'AFSTANDxy(x, y)' = AFSTANDxy(x, y)$

$AFSTANDxy(x, y)$ **(2.2.8)**

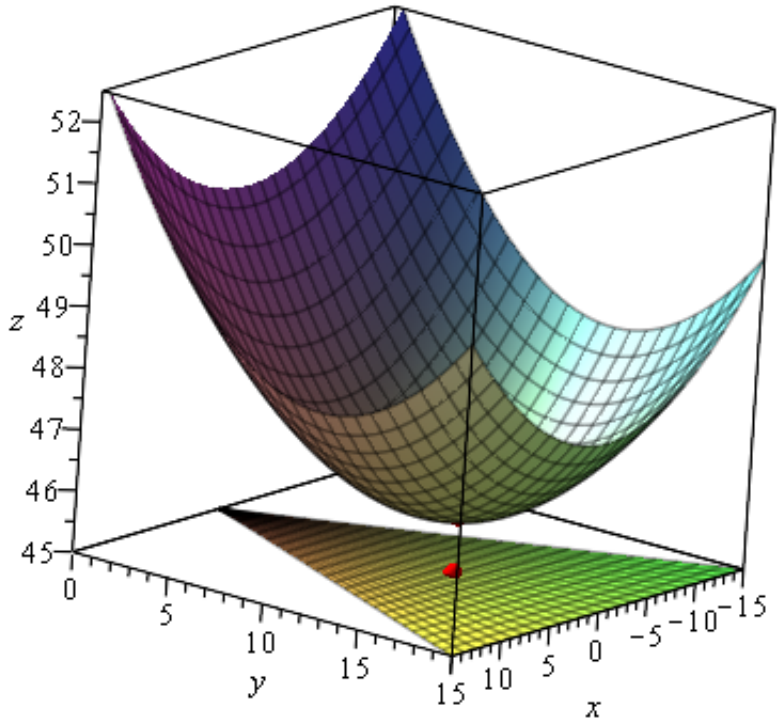
$$= \frac{1}{20}\sqrt{y^2\left(\frac{5\,(4\,x+3\,y)}{y}-15\right)^2+400\,(-25-y)^2+400\left(-44+\frac{7}{5}\,y\right)^2}$$

Nu kan man grafisk se, at afstandsfunktionen har minimum i punktet P.
Tagfladen BCD er projiceret ned på gulvet, dvs. $z = 0$:

```
> with(plots) :
  TrekantGulv := plot3d(g(s, t), s = 0 ..1, t = 0 ..1, labels = [x, y, z], axes = box) :
  Afstandsudtryk := plot3d(AFSTANDxy(x, y), x = -15 ..15, y = 0 ..20, labels = [x, y, z], axes
      = box) :
  Pgulv := pointplot3d([[P1, P2, 0]], symbol = solidsphere, color = red, symbolsize = 20) :
  Pafstand := pointplot3d([[P1, P2, AFSTANDxy(P1, P2)]], symbol = solidsphere, color
      = red, symbolsize = 20) :
  display(TrekantGulv, Afstandsudtryk, Pgulv, Pafstand)
```



Hvis gulvet + projektionspunktet hæves med 45, så kan man bedre se, at P faktisk er et

minimumspunkt
for afstanden mellem E og planen β, samt at P ligger indenfor tagfladen BCD :

```
> with(plots) :
  TrekantGulv := plot3d(g(s, t) + ⟨0, 0, 45⟩, s = 0 ..1, t = 0 ..1, labels = [x, y, z], axes
      = box) :
  Afstandsudtryk := plot3d(AFSTANDxy(x, y), x = -15 ..15, y = 0 ..20, labels = [x, y, z], axes
      = box) :
  Pgulv := pointplot3d([[P1, P2, 45]], symbol = solidsphere, color = red, symbolsize = 20) :
  Pafstand := pointplot3d([[P1, P2, AFSTANDxy(P1, P2)]], symbol = solidsphere, color
      = red, symbolsize = 20) :
  display(TrekantGulv, Afstandsudtryk, Pgulv, Pafstand)
```