

# STX A, 22/5-2015, Opgave 14

**Opgave 14** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved forskrifterne

$$f(x) = a^x$$

$$g(x) = x + 1,$$

hvor  $1 < a < 2$ .

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser i første kvadrant sammen med linjen med ligningen  $x = 1$  en punktmængde  $M$ , der har et areal.

- Bestem arealet af  $M$ , når  $a = 1,5$ .
- Bestem  $a$ , så arealet af  $M$  er  $0,4$ .

## Undersøgelse af mængden $M$ , når $a = 1.5$

```
> restart
```

```
> with(plots) :
```

```
> f := x -> a^x
```

$$f := x \rightarrow a^x \quad (1.1)$$

```
> g := x -> x + 1
```

$$g := x \rightarrow x + 1 \quad (1.2)$$

```
> a := 1.5
```

$$a := 1.5 \quad (1.3)$$

Beregner skæringen mellem de 2 funktioners grafer i 1. kvadrant (incl. 2. aksen):

```
> solve( {f(x) = g(x), x >= 0}, x)
```

$$\{x = 0.\}, \{x = 3.939176457\} \quad (1.4)$$

```
> s := rhs(%[2, 1])
```

$$s := 3.939176457 \quad (1.5)$$

```
> F := plot(f(x), x = 0 .. 6, y = 0 .. 6, color = red) :
```

```
G := plot(g(x), x = 0 .. 6, y = 0 .. 6, color = green) :
```

```
L := implicitplot(x = 1, x = 0 .. 6, y = 0 .. 6, color = blue) :
```

```
P := pointplot( [[0, 1], [s, f(s)]], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = black) :
```

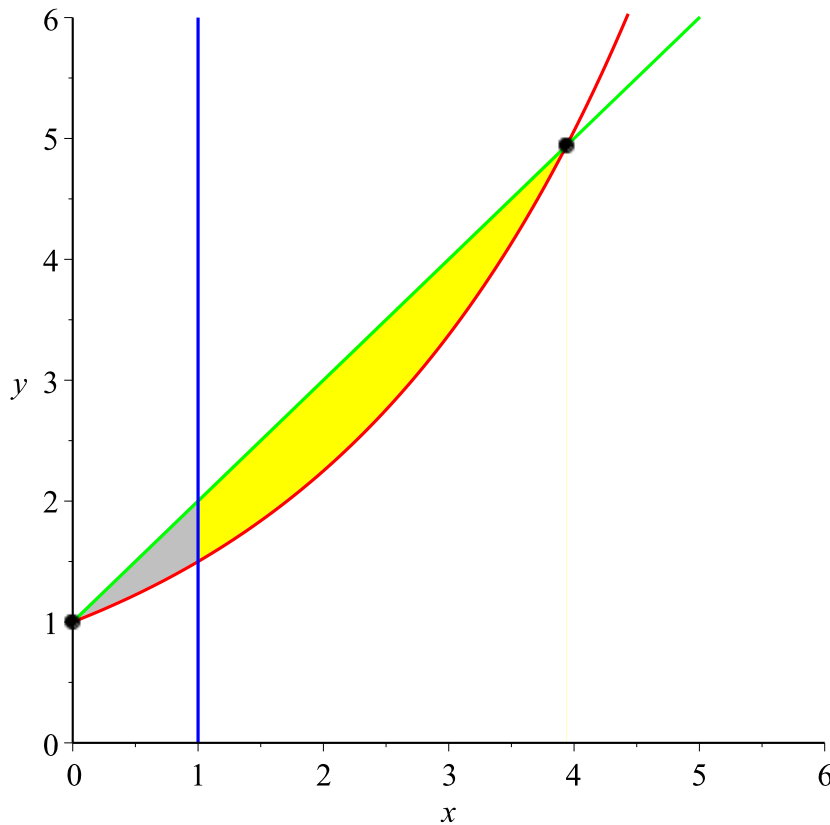
```
G1 := plot(g(x), x = 0 .. 1, y = 0 .. 6, filled, color = grey) :
```

```
F1 := plot(f(x), x = 0 .. 1, y = 0 .. 6, filled, color = white, transparency = 0) :
```

```
G2 := plot(g(x), x = 1 .. s, y = 0 .. 6, filled, color = yellow) :
```

```
F2 := plot(f(x), x = 1 .. s, y = 0 .. 6, filled, color = white, transparency = 0) :
```

```
display(F2, G2, F1, G1, F, G, L, P)
```



## Fejl i opgaven:

Definitionsmængden skal begrænses til  $0 \leq x \leq 1$ .

For så er der i 1. kvadrant kun én mængde, som er begrænset af graferne for  $f$  og  $g$  samt den lodrette linje  $x = 1$ .

Hvis ikke begrænsningen gælder, så er der 2 mulige mængder.

$$> \text{areal}M := \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\text{areal}M := 0.2668482688$$

(1.6)

Konklusion: arealet af mængden  $M$ , når  $a = 1.5$  er ca. 0.267

## ▼ Hvorfor begrænsningen $1 < a < 2$ ?

$$\text{▼ } a = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} > a := 1 \end{array} \right.$$

(2.1.1)

$$a := 1$$

(2.1.1)

Beregn skæringen mellem de 2 funktioners grafer i 1. kvadrant (incl. 2. akse):

```
> solve({f(x) = g(x), x ≥ 0}, x)
```

$$\{x = 0\}$$

(2.1.2)

```
> F := plot(f(x), x = 0 .. 2, y = 0 .. 3, color = red) :
```

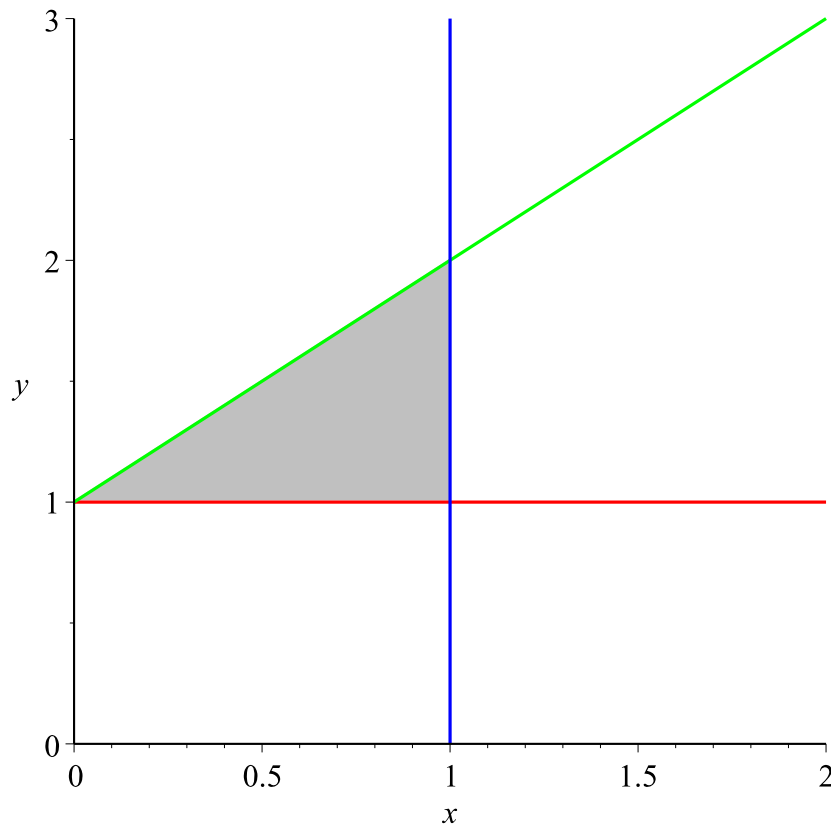
```
G := plot(g(x), x = 0 .. 2, y = 0 .. 3, color = green) :
```

```
L := implicitplot(x = 1, x = 0 .. 2, y = 0 .. 3, color = blue) :
```

```
G1 := plot(g(x), x = 0 .. 1, y = 0 .. 3, filled, color = grey) :
```

```
F1 := plot(f(x), x = 0 .. 1, y = 0 .. 3, filled, color = white, transparency = 0) :
```

```
display(F1, G1, F, G, L)
```



```
> arealM := ∫₀¹ (g(x) - f(x)) dx
```

$$arealM := \frac{1}{2}$$

(2.1.3)

▼ **a = 2**

```
> a := 2
```

(2.2.1)

$$a := 2 \quad (2.2.1)$$

Beregn skæringen mellem de 2 funktioners grafer i 1. kvadrant (incl. 2. akse):

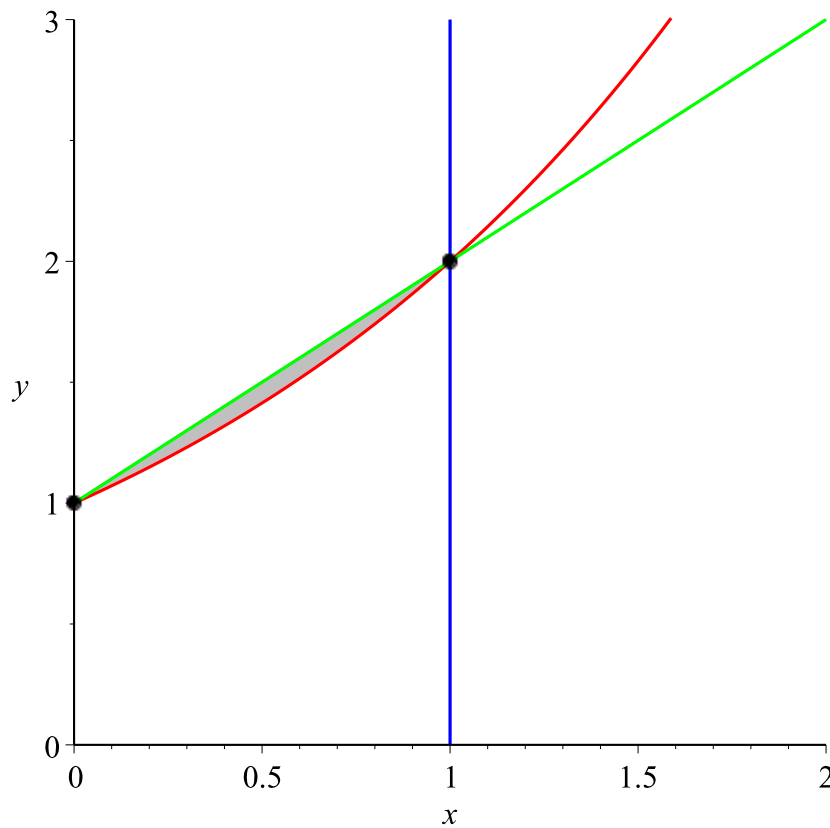
$$\begin{aligned} > \text{solve}(\{f(x) = g(x), x \geq 0\}, x) \\ & \quad \{x=0\}, \{x=1\} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} > s := \text{rhs}(\%[2, 1]) \\ & \quad s := 1 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

```

> F := plot(f(x), x=0..2, y=0..3, color=red) :
G := plot(g(x), x=0..2, y=0..3, color=green) :
L := implicitplot(x=1, x=0..2, y=0..3, color=blue) :
P := pointplot([[0, 1], [s, f(s)]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black) :
G1 := plot(g(x), x=0..1, y=0..3, filled, color=grey) :
F1 := plot(f(x), x=0..1, y=0..3, filled, color=white, transparency=0) :
display(F1, G1, F, G, L, P)

```



Når  $a = 2$  kommer skæringspunktet til at ligge på den lodrette akse  $x = 1$ .

$$> \text{arealM} := \int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx; \text{evalf}(\%)$$

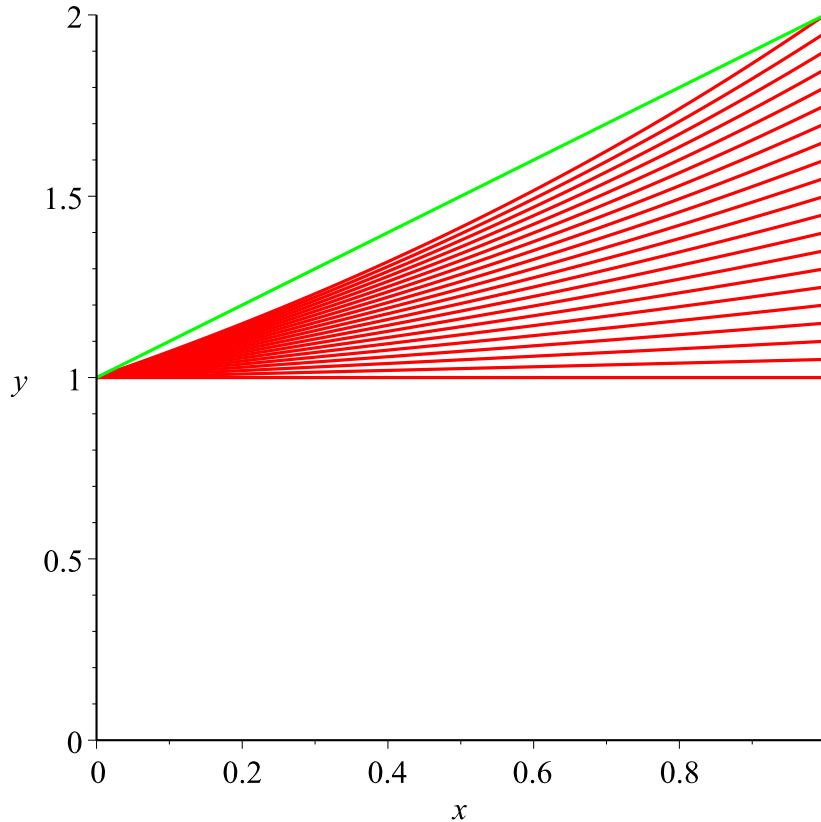
$$\text{areal}M := \frac{1}{2} \frac{-2 + 3 \ln(2)}{\ln(2)}$$

$$0.05730495935$$

(2.2.4)

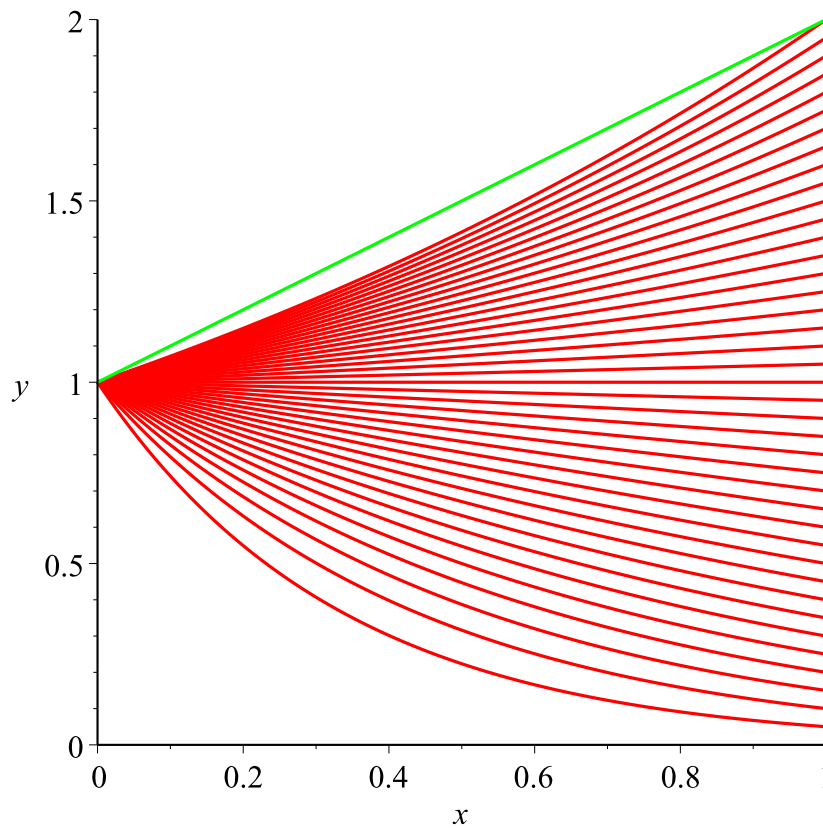
### Plot for $1 < a < 2$

```
> unassign('a')
> F := plot( {seq( f(x), a = 1 ..2, 0.05) }, x=0 ..1, y=0 ..2, color = red) :
G := plot( g(x), x=0 ..1, y=0 ..2, color = green) :
L := implicitplot(x = 1, x=0 ..1, y=0 ..2, color = blue) :
display(F, G, L)
```



Der defineres således en entydig mængde  $M$ , når  $1 < a < 2$ .

```
> F := plot( {seq( f(x), a = 0.05 ..2, 0.05) }, x=0 ..1, y=0 ..2, color = red) :
G := plot( g(x), x=0 ..1, y=0 ..2, color = green) :
L := implicitplot(x = 1, x=0 ..1, y=0 ..2, color = blue) :
display(F, G, L)
```



Begrænsningen på  $a$  kunne uden problemer udvides til  $0 < a < 2$ .

**b)**

$$\text{> solve}\left(\int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx = 0.4, a\right)$$

1.206454299

(3.1)

**Konklusion:** arealet af området  $M$  er 0.4, når  $a \approx 1.206$