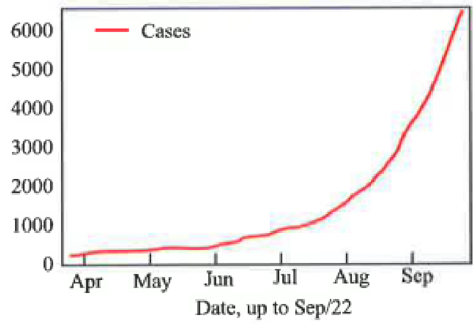
STX A, 22/5-2015, opgave 15

Man har i perioden april til september 2014 opgjort antallet af personer, der er smittet med en bestemt virus i Vestafrika.
Figuren viser udviklingen i antallet af smittede efter første opgørelse.



For at beskrive udviklingen i antallet af smittede har man lavet to modeller.

I den første model antages det, at hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser, er proportional med antallet af smittede.
I modellen måles tiden t i døgn (efter første opgørelse), proportionalitetskonstanten er 0,022, og der er 3800 smittede til tidspunktet $t = 162$.

a) Benyt den første model til at opstille en differentialligning, der beskriver udviklingen i antallet af smittede, og bestem hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$.

I den anden model antages det, at udviklingen i antallet af smittede som funktion af tiden opfylder differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (13382 - N),$$

hvor N betegner antallet af smittede til tidspunktet t målt i døgn (efter første opgørelse).

b) Benyt den anden model til at bestemme hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$, og sammenlign udviklingen i hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser i de to modeller til tidspunktet $t = 162$.

Kilde: en.wikipedia.org/wiki/Ebola_virus_epidemic_in_West_Africa

NB: Kilden må være herfra: https://en.wikipedia.org/wiki/Ebola_virus_epidemic_in_West_Africa#Graphs
blot er den valgte graf fra tidligt i forløbet af epidemien.

Hvorfor skrives "en bestemt virus" i stedet for at være præcis: "ebola virus".

> *restart*

a) Model 1 (eksponentiel)

Variable:
t = antal døgn efter første opgørelse
N = antal smittede

Differentialligning model 1:

$$\frac{dN}{dt} = 0.022 \cdot N$$

Betingelse:
$N(162) = 3800$

> $N162 := 3800$

$$N162 := 3800 \quad (1.1)$$

> $N1m := 0.022 \cdot N162$

$$N1m := 83.600 \quad (1.2)$$

Konklusion: i følge model 1 vokser antal smittede efter 162 døgn med ca. $84 \ \frac{personer}{døgn}$

b) Model 2 (logistisk)

Logistisk differentialligning model 2:

$$\frac{dN}{dt} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (13382 - N)$$

Hastigheden, hvormed antal smittede vokser til tidspunkt $t = 162$?

Uklart om $N(162) = 3800$ også gælder for model 2!
Det er fordi opgivelsen står under omtalen af model 1. Burde stå i teksten *inden* modellerne omtales.
$N(162) = 3800$ er nødvendigt, ellers kan spørgsmålet ikke besvares.

> $N2m := 3 \cdot 10^{-6} \cdot N162 \cdot (13382 - N162); evalf(\%)$

$$N2m := \frac{273087}{2500}$$

$$109.2348000 \quad (2.1)$$

Konklusion: i følge model 2 vokser antal smittede efter 162 døgn med ca. $109 \ \frac{personer}{døgn}$

2. del af spørgsmål b er svær at forstå!
Der må være tale om ændringen i hastigheden, hvormed antal smittede vokser. Dvs. $N''(162)$.

Model 1

$N'(t) = 0.022 \cdot N(t) \Rightarrow N''(t) = 0.022 \cdot N'(t)$
Dvs. $N''(162) = 0.022 \cdot N'(162)$

> $0.022 \cdot N1m$

$$1.839200 \tag{2.1.1}$$

Model 2

$N'(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N(t) \cdot (13382 - N(t)) \Rightarrow N''(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N'(t) \cdot (13382 - N(t)) + 3 \cdot 10^{-6} \cdot N(t) \cdot (0 - N'(t))$
Dvs. $N''(162) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N'(162) \cdot (13382 - N(162)) + 3 \cdot 10^{-6} \cdot N(162) \cdot (0 - N'(162))$

> $3 \cdot 10^{-6} \cdot N2m \cdot (13382 - N162) + 3 \cdot 10^{-6} \cdot N162 \cdot (0 - N2m)$; $evalf(\%)$

$$\frac{2368483551}{1250000000}$$
$$1.894786841 \tag{2.2.1}$$

Konklusion: udviklingen i hastigheden, hvormed antal smittede vokser, er INDEN FOR USIKKERHEDEN den samme for begge modeller.
Hastigheden vokser med ca. 1.8-1.9 personer pr. døgn. Det til trods for, at model 1 og model 2 har hastigheder på 84 hhv. 109 personer pr. døgn.