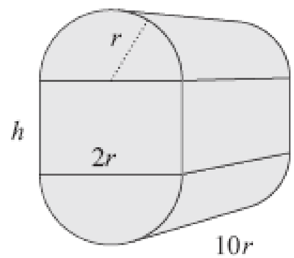
Opgave 7 (fra eksamensopgavesæt 100526, STX A)

En postkasse har form som vist på figuren, hvor hver af postkassens endeflader er sammensat af et rektangel og to halvcirkler. Disse halvcirkler har radius r, mens rektanglets sider er $2r$ og h. Desuden er postkassens bredde $10r$.



a) Bestem postkassens overfladeareal udtrykt ved r og h.

For en bestemt type postkasse med denne form er postkassens rumfang V som funktion af r bestemt ved

$$V(r) = \frac{25r(500 - \pi r^2)}{3}, \qquad 0 < r < 12.$$

b) Bestem r, så en postkasse af denne type har størst muligt rumfang.

\> *restart*

a)

Overfladearealet kan findes ved at opdele overfladen i dele:
* hver endeflade består af 2 halvcirkler, dvs. 1 cirkel, samt et rektangel
* sidefladen består af 2 rektangler samt 2 halve cylinderflader, dvs. 1 cylinderflade

\> $EndeRektangel := h \cdot (2 \cdot r)$

$$EndeRektangel := 2\,h\,r \tag{1.1.1}$$

\> $EndeCirkel := \pi \cdot r^2$

$$EndeCirkel := \pi\,r^2 \tag{1.1.2}$$

\> $SideRektangel := h \cdot (10 \cdot r)$

$$SideRektangel := 10\,h\,r \tag{1.1.3}$$

\> $SideCylinder := (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot (10 \cdot r)$

$$SideCylinder := 20\,\pi\,r^2 \tag{1.1.4}$$

\> $OverfladeAreal := 2 \cdot EndeRektangel + 2 \cdot EndeCirkel + 2 \cdot SideRektangel + SideCylinder$

$$OverfladeAreal := 24\,h\,r + 22\,\pi\,r^2 \tag{1.1.5}$$

Konklusion: Overfladearealet af postkassen er givet ved formlen

$$24 \cdot h \cdot r + 22 \cdot \pi \cdot r^2$$

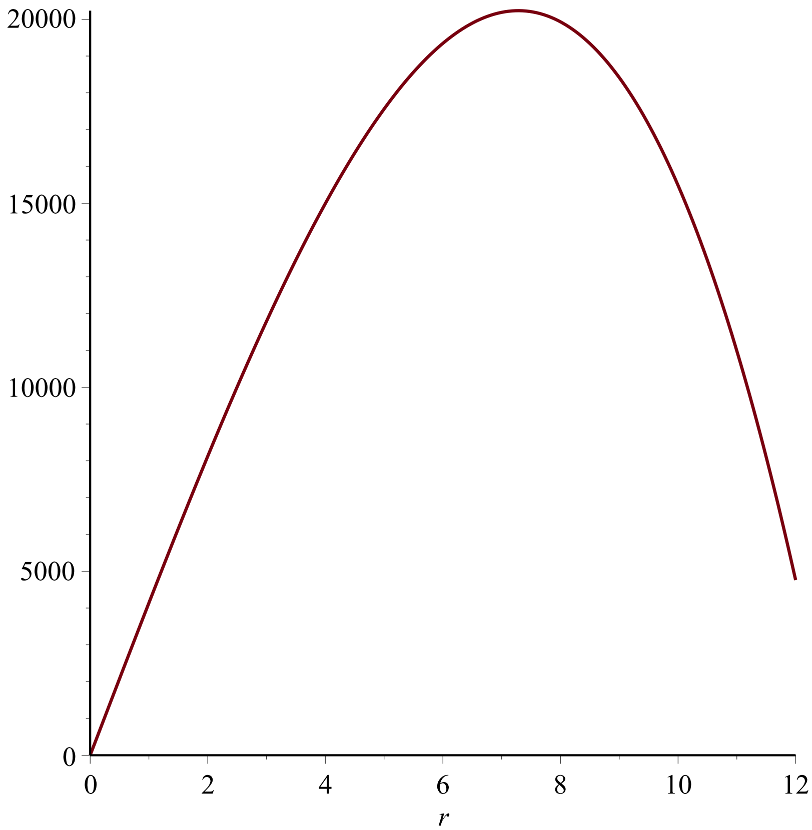
b)

Postkassens rumfang er givet ved følgende formel for $0 < r < 12$:

> $V := r \rightarrow \frac{25 \cdot r \cdot (500 - \pi \cdot r^2)}{3}$

$$V := r \rightarrow \frac{25}{3}\, r\,(500 - \pi\, r^2) \tag{1.2.1}$$

> $plot(V(r), r = 0..12)$



Bemærk, at formlen for $V(r)$ er veldefineret (giver positiv værdi) i intervallet $0 < r < 12$.
Grafen bliver ikke 0 i $r = 12$, så hvor stor kan definitionsmængde være?

> $solve(\{V(r) = 0, r > 0\}, r); evalf(\%)$

$$\left\{ r = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

$$\{ r = 12.61566261 \} \tag{1.2.2}$$

> $solve(\{V(r) > 0, r > 0\}, r); evalf(\%)$

$$\{0 < r, r < RootOf(-500 + \pi \_Z^2, index = 1)\}$$

$$\{0. < r, r < 12.61566261\} \tag{1.2.3}$$

Definitionsmængden for den givne formel er $\underline{\underline{0 < r < 12.62}}$

Så det er OK, at man kun skal arbejde indenfor intervallet $0 < r < 12$.

> $maximize(V(r), r, r = 0..12, location); evalf(\%)$

$$\frac{250000}{27} \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}, \left\{\left[\left\{r = \frac{10}{3} \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\right\}, \frac{250000}{27} \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\right]\right\}$$

$$20232.37834, \{[\{r = 7.283656203\}, 20232.37834]\} \tag{1.2.4}$$

> $r := rhs(\%\%[2, 1, 1, 1]); evalf(\%)$

$$r := \frac{10}{3} \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$$

$$7.283656203 \tag{1.2.5}$$

Konklusion: Postkassen har størst muligt rumfang, når $\underline{\underline{r \approx 7.28}}$

NB: Passer glimrende med grafen.

EKSTRA:
Passer formlen for rumfang af postkassen?

Rumfanget kan findes ved opdeling i 2 dele:
* i midten en kasse med dimensionerne h, $2 \cdot r$ og $10 \cdot r$
* 2 halve cylindre, tilsammen 1 hel cylinder, med radius r og højde $10 \cdot r$

> $unassign('r')$

> $Kasse := h \cdot (2 \cdot r) \cdot (10 \cdot r)$

$$Kasse := 20\, h\, r^2 \tag{1.2.6}$$

> $Cylinder := (\pi \cdot r^2) \cdot (10 \cdot r)$

$$Cylinder := 10\, \pi\, r^3 \tag{1.2.7}$$

> $Rumfang := Kasse + Cylinder$

$$Rumfang := 20\, h\, r^2 + 10\, \pi\, r^3 \tag{1.2.8}$$

> $Formel := \frac{25 \cdot r \cdot (500 - \pi \cdot r^2)}{3}$

$$Formel := \frac{25}{3}\, r\, (500 - \pi\, r^2) \tag{1.2.9}$$

> $solve(Rumfang = Formel, h)$

$$-\frac{1}{12} \frac{-2500 + 11\, \pi\, r^2}{r} \tag{1.2.10}$$

Konklusion: ???????

Så må vi prøve noget andet:

Antag, at overfladearealet er 5000. Find så h, og indsæt denne værdi i rumfangsudtrykket.

> $h := solve(OverfladeAreal = 5000, h)$

$$h := -\frac{1}{12}\,\frac{-2500 + 11\,\pi\,r^2}{r} \tag{1.2.11}$$

> $Rumfang$

$$-\frac{5}{3}\,r\left(-2500 + 11\,\pi\,r^2\right) + 10\,\pi\,r^3 \tag{1.2.12}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{12500}{3}\,r - \frac{25}{3}\,\pi\,r^3 \tag{1.2.13}$$

> $is(Rumfang = Formel)$

$$true \tag{1.2.14}$$

Konklusion: Nu giver formlen mening!

Men giver definitionsmængden $0 < r < 12$ i opgaven mening?

> $solve(\{h > 0, r > 0\}, r);\ evalf(\%)$

$$\left\{0 < r, r < RootOf\left(-2500 + 11\,\pi\,\_Z^2, index = 1\right)\right\}$$
$$\{0. < r, r < 8.505477997\} \tag{1.2.15}$$

Definitionsmængden mht. udtrykket for *h* er $\underline{\underline{0 < r < 8.51}}$

Vi ser endnu engang, at opgavens ordlyd sagtens kan løses, men den angivne definitionsmængde giver ikke mening i virkeligheden!