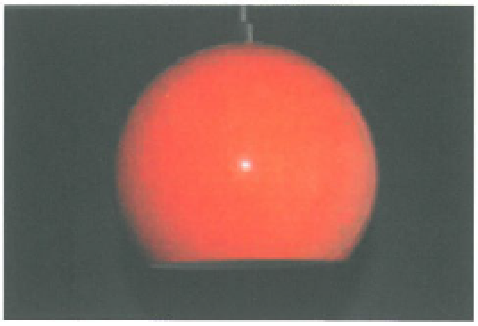
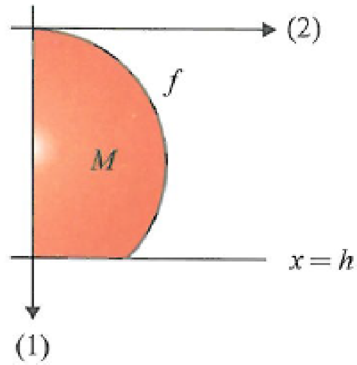
Matematik, STX A, 28. maj 2015

Opgave 14





En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\sqrt{-x^2+20x}\text{ , hvor } 0\leq x\leq 20\ .$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen $x=h$ et område M.
Det oplyses, at $10\leq h\leq 20$.

Det ydre af en serie af lamper har form som overfladen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ omkring førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

a) Tegn grafen for f, og bestem lampens diameter på det bredeste sted og ved lampens åbning, når $h=18$.

Det oplyses, at lampens overfladeareal kan beregnes ved integralet

$$O=2\pi\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\ .$$

b) Bestem h, når overfladearealet er 1005.

Det oplyses endvidere, at lamperne i serien har form som en del af en kugle.

c) Bestem en ligning for den kugle, som lampen er en del af.

> *restart*

a)

Funktionen f er defineret for $0 \leq x \leq 20$:

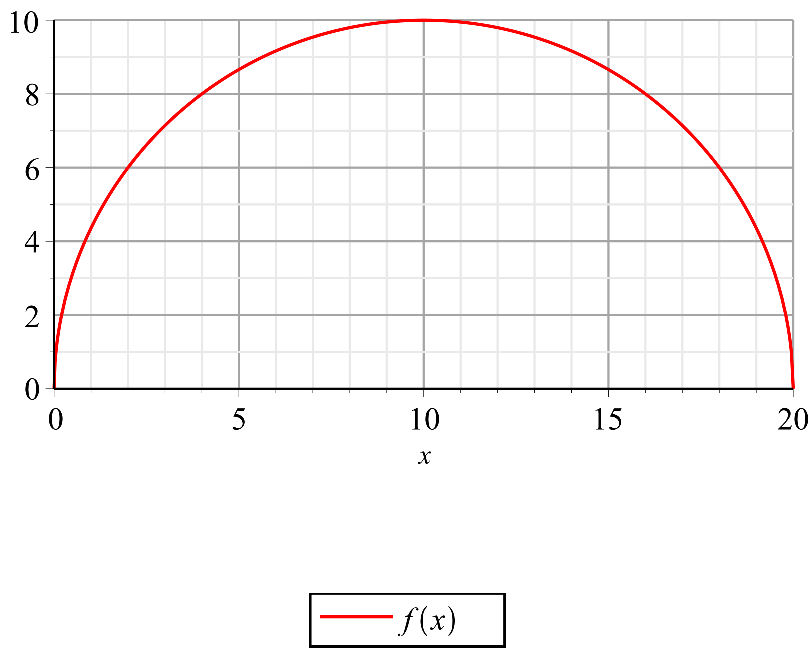
> $f := x \rightarrow \sqrt{-x^2 + 20 \cdot x}$

$$f := x \rightarrow \sqrt{-x^2 + 20\,x} \tag{1.1.1}$$

UKLARHED: skal grafen tegnes i området $0 \leq x \leq 20$ eller i området $0 \leq x \leq 18$?
Det afhænger af om teksten "når $h = 18$" går på hele sætningen eller kun på sidste del!

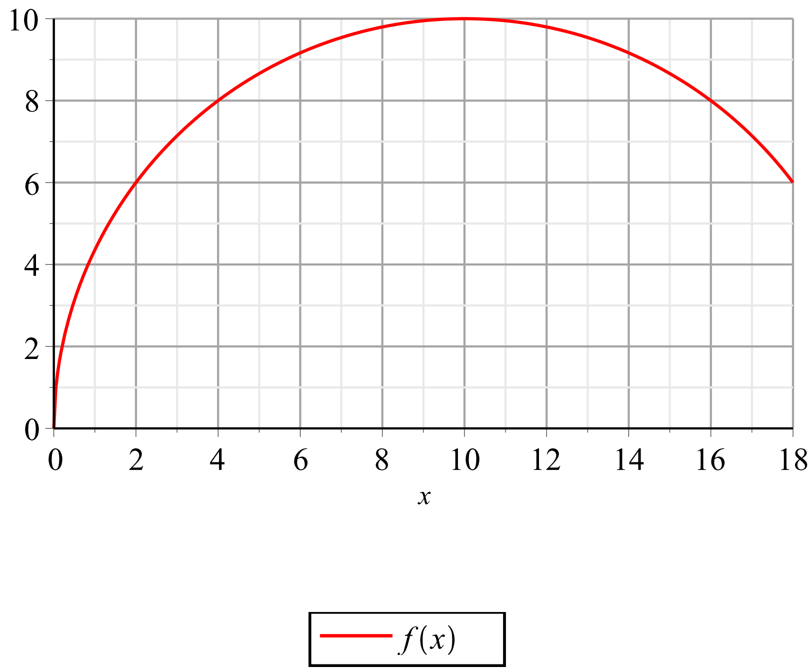
Grafen for f:

> $plot(f(x), x = 0..20, gridlines, scaling = constrained, legend = 'f(x)', color = red)$



Graf, når $h = 18$:

> $plot(f(x), x = 0..18, gridlines, scaling = constrained, legend = 'f(x)', color = red)$



Aflæser største diameter:

> $DiameterMax := 2 \cdot f(10)$

$$DiameterMax := 20 \tag{1.1.2}$$

eller bedre:

> $2 \cdot maximize(f(x), x = 0..18); simplify(\%)$

$$2\sqrt{100}$$
$$20 \tag{1.1.3}$$

> $DiameterÅbning := 2 \cdot f(18)$

$$DiameterÅbning := 12 \tag{1.1.4}$$

Konklusion: største diameter er $\underline{\underline{20\ cm}}$, og diameteren ved åbningen er $\underline{\underline{12\ cm}}$

b)

Umiddelbart vil Maple 18 ikke løse denne opgave:

> $solve\left(2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 1005, h\right)$

Warning, unable to determine if 20 is between 0 and h; try to use assumptions or use the AllSolutions option

```
Error, (in solve) cannot solve expressions with int((1/2)*(-
x^2+20*x)^(1/2)*(4+(-2*x+20)^2/(-x^2+20*x))^(1/2), x = 0 ..
h) for h
```

Metode 1 (reducere integranden før der integreres)

Undersøge integranden:

> $f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+20\,x}\,\sqrt{4+\frac{(-2\,x+20)^2}{-x^2+20\,x}} \qquad \textbf{(1.2.1.1)}$$

Prøve at få integranden skrevet simplere:

> *simplify*(%)

$$10\sqrt{-x\,(x-20)}\,\sqrt{-\frac{1}{x\,(x-20)}} \qquad \textbf{(1.2.1.2)}$$

Det ser klart, at $-x\cdot(x-20)$ kan forkortes væk, så der kun er $10\cdot\sqrt{1}$ dvs. 10 tilbage!
Her ser vi helt bort fra singulariteten i $x=0$, idet $f\,'(0)$ ikke er defineret!

Det kan man få Maple til at reducere sådan:

> *simplify*(%) assuming $0 \le x \le 20$

$$10 \qquad \textbf{(1.2.1.3)}$$

Dvs. integranden kan reduceres til 10, som er radius for kuglen!

Så kan opgaven let løses:

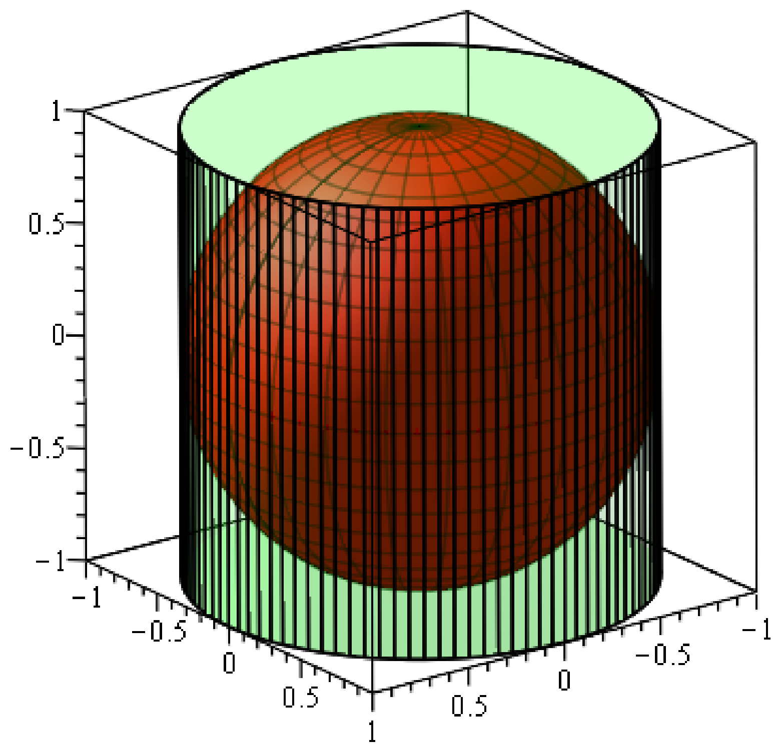
> $solve\left(2\cdot\pi\cdot\int_0^h \%\,\mathrm{d}x = 1005, h\right);\ evalf(\%)$

$$\frac{201}{4\,\pi}$$

$$15.99507178 \qquad \textbf{(1.2.1.4)}$$

Archimedes fandt ud af, at overfladearealet af en kuglen var = overfladearealet af den omsluttende cylinder:

> *with*(*plots*) :
> *with*(*plottools*) :
> $c := display(cylinder([0, 0, -1], 1, 2, strips = 100), transparency = 0.8, color = green)$:
> $s := display(sphere([0, 0, 0], 1), color = red)$:
> *display*(*c*, *s*)



Metode 2 (sætte antagelse om h på ligningsløsningen)

Den almindelige ligningsløser kræver her viden om, at $10 \le h \le 20$:

$$> \; solve\left(2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 1005, h\right) \text{ assuming } 10 \le h \le 20;\ evalf(\%)$$

$$\frac{201}{4\,\pi}$$

$$15.99507178 \qquad \textbf{(1.2.2.1)}$$

Den numeriske ligningsløser kommer 'hostende' igennem, hvis man har fortalt, at $10 \le h \le 20$:

$$> \; fsolve\left(2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 1005, h = 10..20\right)$$

Warning, unable to determine if 20 is between 0 and h; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$15.99507178 \qquad \textbf{(1.2.2.2)}$$

Konklusion: overfladearealet er 1005, når $h \approx 16.0\ cm$

c)

Ligningen for den kugle, som lampen er en del af?

Diameteren er 20, dvs. $r = 10$.
Centrum er (10,0,0).
Konklusion: kuglens ligning er $\underline{\underline{(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 10^2}}$

<u>eller</u>:

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 20 \cdot x} \Leftrightarrow y = \sqrt{-x^2 + 20 \cdot x} \Rightarrow y^2 = -x^2 + 20 \cdot x \Leftrightarrow$
$x^2 - 20 \cdot x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 + y^2 = 10^2$

Det er ligningen for cirkel i xy-planen.

Kuglens ligning i xyz-rummet bliver så: $\underline{\underline{(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 10^2}}$