STX A 29. maj 2013, opgave 14

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-0{,}1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x)\,,\ \ x \geq 0\,.$$

Funktionen f har i intervallet $[0;3]$ to x-værdier x_1 og x_2, hvori der er lokale maksima.

a) Tegn grafen for f, og bestem koordinatsættene til hvert af punkterne $A(x_1, f(x_1))$ og $B(x_2, f(x_2))$.

b) Bestem en forskrift for den eksponentialfunktion $g(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem A og B.

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser i intervallet $[x_1\,;\,x_2]$ et område M, der har et areal.

c) Bestem arealet af M.

a)

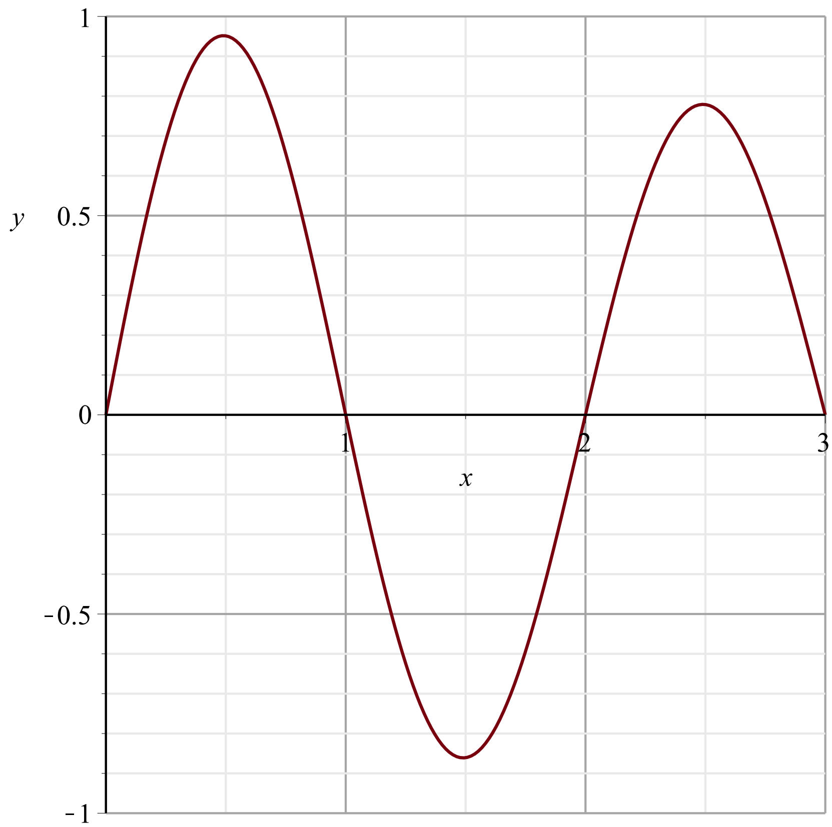
> *restart*

> $f := x \rightarrow e^{-0.1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x)$

$$f := x \rightarrow e^{(-1) \cdot 0.1\, x} \sin(\pi\, x) \qquad \textbf{(1.1)}$$

Grafen:

> $plot(f(x), x = 0..3, y = -1..1, gridlines)$



Beregner de 2 lokale maksima.
(tricky at få til at virke i Maple)

> $maximize(f(x), x, x = 0..1, location)$

$$0.9517113637, \{[\{x = 0.4898713016\}, 0.9517113637]\} \quad \textbf{(1.2)}$$

> $x1 := rhs(\%[2, 1, 1, 1])$

$$x1 := 0.4898713016 \quad \textbf{(1.3)}$$

> $y1 := \%\%[2, 1, 2]$

$$y1 := 0.9517113637 \quad \textbf{(1.4)}$$

> $maximize(f(x), x, x = 2..3, location)$

$$0.7791953615, \{[\{x = 2.489871302\}, 0.7791953615]\} \quad \textbf{(1.5)}$$

> $x2 := rhs(\%[2, 1, 1, 1])$

$$x2 := 2.489871302 \quad \textbf{(1.6)}$$

> $y2 := \%\%[2, 1, 2]$

$$y2 := 0.7791953615 \quad \textbf{(1.7)}$$

> $[x1, y1]$

$$[0.4898713016, 0.9517113637] \quad \textbf{(1.8)}$$

> $[x2, y2]$

(1.9)

$$[2.489871302, 0.7791953615] \quad (1.9)$$

Konklusion: Punkterne er $\underline{\underline{A \approx (0.490, 0.952)}}$ og $\underline{\underline{B \approx (2.490, 0.779)}}$

b)

Laver eksponentiel regression:

> $with(Gym):$

> $X := [x1, x2]$

$$X := [0.4898713016, 2.489871302] \quad (2.1)$$

> $Y := [y1, y2]$

$$Y := [0.9517113637, 0.7791953615] \quad (2.2)$$

> $g := unapply(ExpReg(X, Y, x), x) : 'g(x)' = g(x)$

Warning, there are zero degrees of freedom

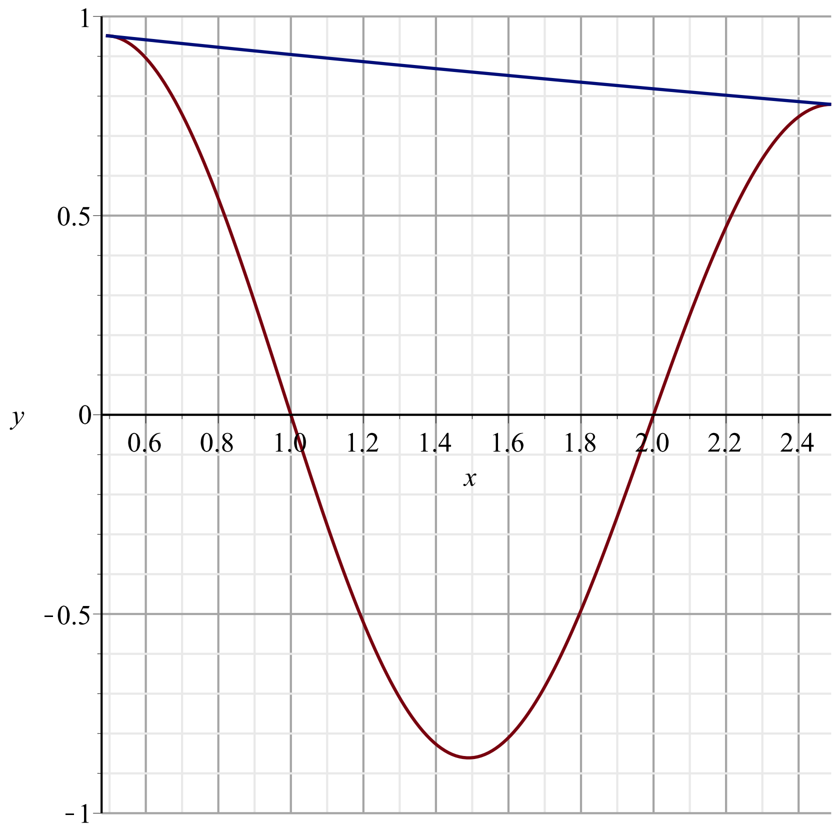
$$g(x) = 0.999493778785666\ 0.904837418031435^x \quad (2.3)$$

Konklusion: Forskriften for eksponentialfunktionen gennem A og B er $\underline{\underline{g(x) \approx 0.999 \cdot 0.905^x}}$

c)

Tegner de 2 grafer:

> $plot(\{f(x), g(x)\}, x = x1 ..x2, y = -1 ..1, gridlines)$



Det ser ud som om $g(x)$ ligger helt over $f(x)$.

Det undersøges nærmere:

> $g'(x1)$

$$-0.0951711363750178 \tag{3.1}$$

> $evalf(f'(x1))$

$$-2.52\ 10^{-9} \tag{3.2}$$

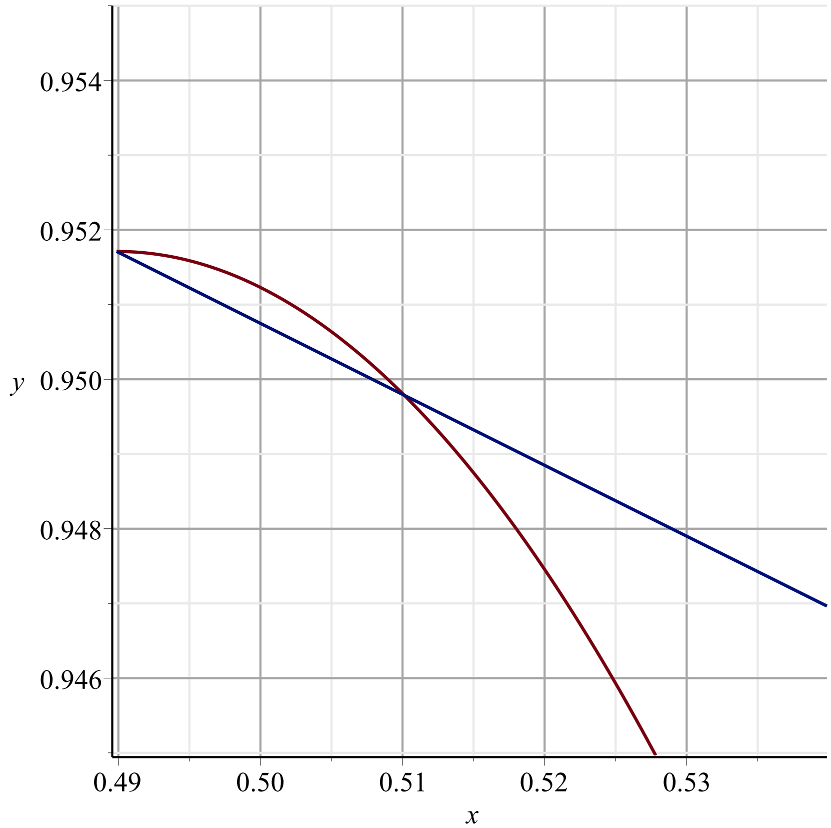
Eksponentialfunktionen $g(x)$ har altså en negativ tangenthældning i x_1 , hvorimod $f(x)$ har vandret tangent i x_1 (pga. måden x_1 er fundet på)!

Det betyder, at $g(x)$ dykker ned under $f(x)$ et lille stykke til højre for x_1.

NB: Der er ikke samme problem til venstre for x_2.

Graf tegnes for at se med egne øjne:

> $plot(\{f(x), g(x)\}, x = x1 ..x1 + 0.05, y = 0.945 ..0.955, gridlines)$



Skæringspunktet beregnes.
(tricky at få til at virke i Maple)

> $x3 := fsolve(f(x) = g(x), x, x1..x2)$

$$x3 := 0.5101286979 \quad (3.3)$$

Tiltænkt løsning:

> $Areal := \int_{x1}^{x2} (g(x) - f(x))\, dx$

$$Areal := 1.721667655 \quad (3.4)$$

Konklusion: Arealet af området er ca. $\underline{\underline{1.72}}$

Området består faktisk af 2 dele, hvis areal skal summeres!

Korrekte løsning:

> $Areal := \int_{x1}^{x3} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{x3}^{x2} (g(x) - f(x))\, dx$

$$Areal := 1.721680661 \quad (3.5)$$

Konklusion: Arealet af området er ca. 1.72

NB: Forskellen er ude på 5. decimal!