

STX eksamensopgave matematik A d. 29. maj 2013

http://www.uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Skriftlige-opgavesaet/~media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF13/Proever%20og%20eksamen/Opgavesaet/130529%20stx131_MAT_A_2.ashx

I en model for en bestemt kemisk reaktion omdannes et stof A . Mængden af stoffet A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2,$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffet A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A , og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A .

- Bestem en forskrift for $M(t)$, og bestem konstanten k .
- Bestem $M'(60)$, og gør rede for betydningen af dette tal.

Rettelse:

http://www.uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Skriftlige-opgavesaet/~media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF13/Proever%20og%20eksamen/Opgavesaet/130529%20Rettelsesblad_matAstx_ny_gl_2.ashx

Delprøven med hjælpemidler, side 7, opgave 15, linje 3 (formlen).

Der står: M^2

Der skal stå: M

Den korrekte formel er: $\frac{dM}{dt} = -k \cdot M$

Hvad er formålet med rettelsen??????????????

Opgavens 2 versioner er af samme sværhedsgrad!!!!!!!!!!!!

Differentialligningsmodeller for kemiske reaktioner kan findes på min hjemmeside:

<http://steen-toft.dk/mat/enzym/maple/reaktion.pdf>

2. ordens reaktion (den oprindelige version)

Differentialligningen er af Bernoulli-typen.

Løsning af denne type kan findes på min hjemmeside:

<http://steen-toft.dk/mat/20122013/3g1/model/bern-dif.pdf>

Løsning med håndkraft:

Se side 1-3 i noten fra Bjørn Grøn:

<http://steen-toft.dk/mat/20122013/3g1/model/n212.pdf>

Eller se side 4-7 i min noten:

<http://steen-toft.dk/mat/enzym/maple/reaktion.pdf>

> restart

> DiffLign := M'(t) = -k·M(t)²

$$\text{DiffLign} := D(M)(t) = -k M(t)^2 \quad (1.1)$$

> Beting1 := M(0) = 70

$$\text{Beting1} := M(0) = 70 \quad (1.2)$$

> Beting2 := M(60) = 20

$$\text{Beting2} := M(60) = 20 \quad (1.3)$$

a)

> dsolve({DiffLign, Beting1})

$$M(t) = \frac{70}{1 + 70 k t} \quad (1.1.1)$$

> M := unapply(rhs(%), t) :

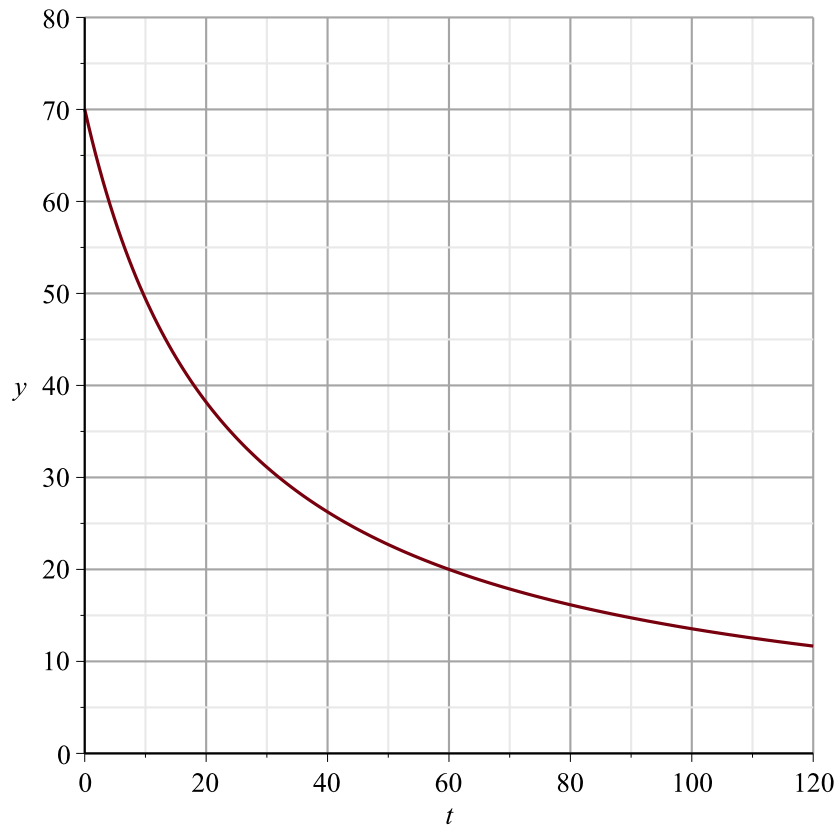
> k := solve(Beting2, k); evalf(%)

$$k := \frac{1}{1680} \\ 0.0005952380952 \quad (1.1.2)$$

> 'M(t)' = M(t)

$$M(t) = \frac{70}{1 + \frac{1}{24} t} \quad (1.1.3)$$

> plot(M(t), t=0..120, y=0..80, gridlines)



Konklusion: Forskriften for $M(t)$ lyder: $M(t) = \frac{70}{1 + \frac{1}{24} \cdot t}$ og konstanten $k = \frac{1}{1680} \approx 0.00060$

b)

> $M'(60)$; evalf (%)

$$-\frac{5}{21}$$

$$-0.2380952381$$

(1.2.1)

Konklusion: $M'(60) = -\frac{5}{21} \approx -0.24$

Det betyder, at efter 60 minutter (dvs. 1 time) vil den kemiske reaktion bevirke, at ca. 0.23 mg af stoffet vil reagere det næste minut.

1. ordens reaktion (den rettede version)

Differentialligningen er af typen $y' = k \cdot y$

Løsning af denne type kan findes på min hjemmeside:
<http://steen-toft.dk/mat/20112012/3x/diff lign/bevis12.pdf>

```
> restart
```

```
> DiffLign := M'(t) = -k·M(t)
```

$$\text{DiffLign} := D(M)(t) = -k M(t) \quad (2.1)$$

```
> Beting1 := M(0) = 70
```

$$\text{Beting1} := M(0) = 70 \quad (2.2)$$

```
> Beting2 := M(60) = 20
```

$$\text{Beting2} := M(60) = 20 \quad (2.3)$$

a)

```
> dsolve( {DiffLign, Beting1} )
```

$$M(t) = 70 e^{-kt} \quad (2.1.1)$$

```
> M := unapply(rhs(%), t) :
```

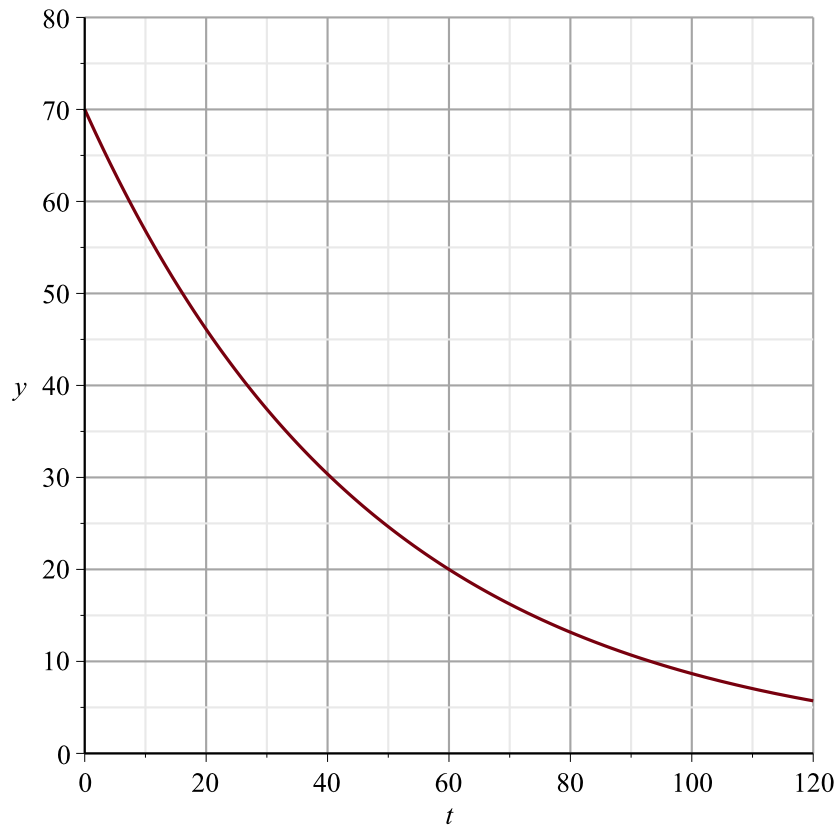
```
> k := solve(Beting2, k); evalf(%)
```

$$k := -\frac{1}{60} \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ 0.02087938282 \quad (2.1.2)$$

```
> 'M(t)' = M(t)
```

$$M(t) = 70 e^{\frac{1}{60} \ln\left(\frac{2}{7}\right)t} \quad (2.1.3)$$

```
> plot(M(t), t=0..120, y=0..80, gridlines)
```



$$M(t) = 70 \cdot e^{\frac{1}{60} \cdot \ln\left(\frac{2}{7}\right) t} = 70 \cdot \left(e^{\ln\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{60}}\right)} \right)^t = 70 \cdot \left(60 \sqrt{\frac{2}{7}} \right)^t$$

Konklusion: Forskriften for $M(t)$ lyder: $M(t) = 70 \cdot e^{\frac{1}{60} \ln\left(\frac{2}{7}\right) t} = 70 \cdot \left(60 \sqrt{\frac{2}{7}} \right)^t$ og konstanten

$$k = -\frac{1}{60} \cdot \ln\left(\frac{2}{7}\right) \approx 0.021$$

b)

> $M'(60)$; evalf(%)

$$\frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ -0.4175876563$$

(2.2.1)

Konklusion: $M'(60) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{7}\right) \approx -0.42$

Det betyder, at efter 60 minutter (dvs. 1 time) vil den kemiske reaktion bevirke, at ca. 0.42 mg af stoffet vil reagere det næste minut.