STX A, 31/5-2012, opgave 12

Et kar med saltvand tilføres løbende en saltopløsning, mens der samtidig løber saltvand ud af karret.
I en model kan udviklingen i saltmængden i karret beskrives ved en funktion S, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dS}{dt} = 1{,}5 - \frac{2}{100+t} \cdot S \, ,$$

hvor $S(t)$ er saltmængden (målt i kg) til tidspunktet t (målt i minutter).

Det oplyses, at der er 30 kg salt i karret til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem en forskrift for S.

b) Bestem det tidspunkt, hvor der er 60 kg salt i karret.

> *restart*

a)

Differentialligningen løses:

> $DiffLign := S'(t) = 1.5 - \frac{2}{100+t} \cdot S(t)$

$$DiffLign := \mathrm{D}(S)(t) = 1.5 - \frac{2\,S(t)}{100+t} \quad \textbf{(1.1)}$$

> $Betingelse := S(0) = 30$

$$Betingelse := S(0) = 30 \quad \textbf{(1.2)}$$

> $dsolve(\{DiffLign, Betingelse\})$

$$S(t) = 50 + \frac{1}{2}\,t - \frac{200000}{(100+t)^2} \quad \textbf{(1.3)}$$

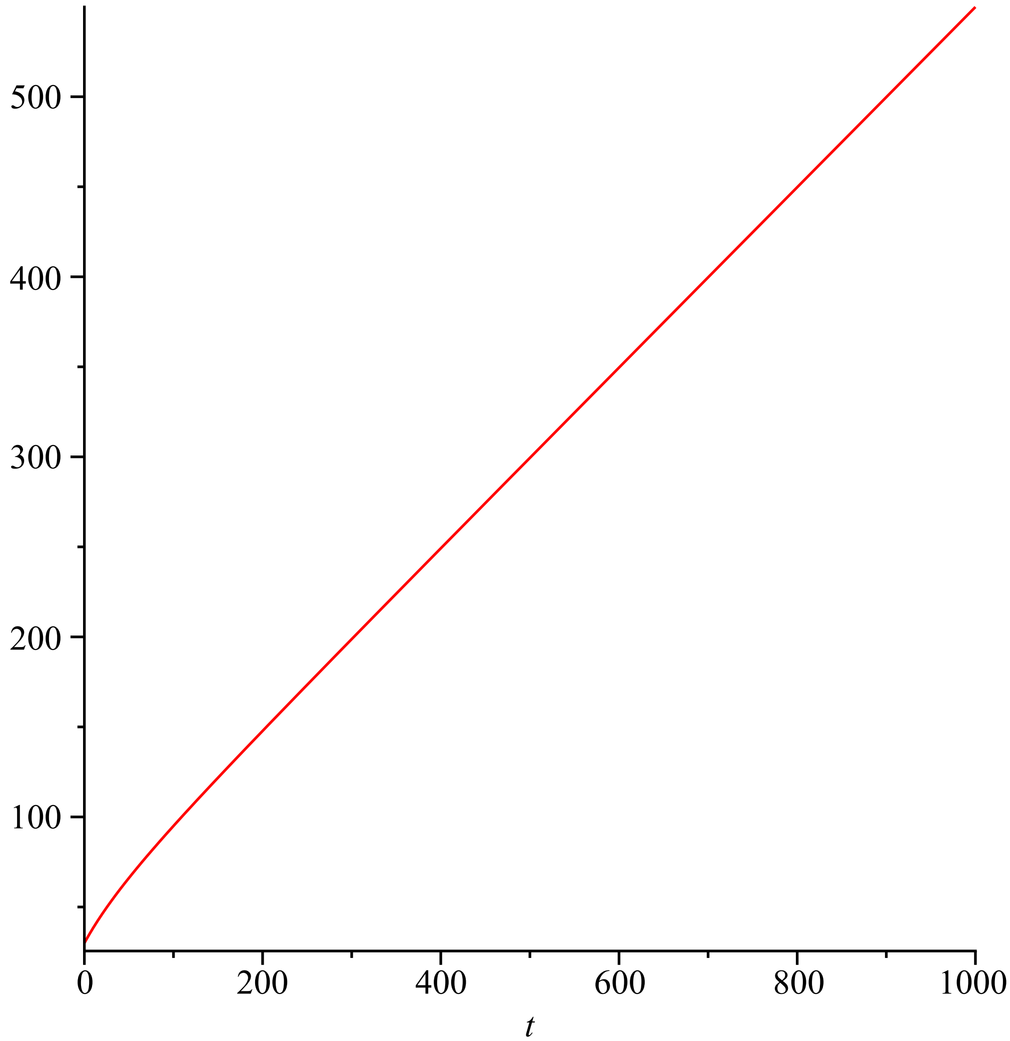
Konklusion: $S(t) = 50 + \frac{1}{2}\,t - \frac{200000}{(100+t)^2}$

Problemet med modelopgaven er, at saltmængden vokser i mod ∞, efterhånden som tiden går !!!
Det er altså ikke en realistisk modelopgave.

> $\lim_{t \to \infty} rhs(\textbf{(1.3)})$

$$\infty \quad \textbf{(1.4)}$$

> $plot(rhs(\textbf{(1.3)}), t = 0\,..1000)$



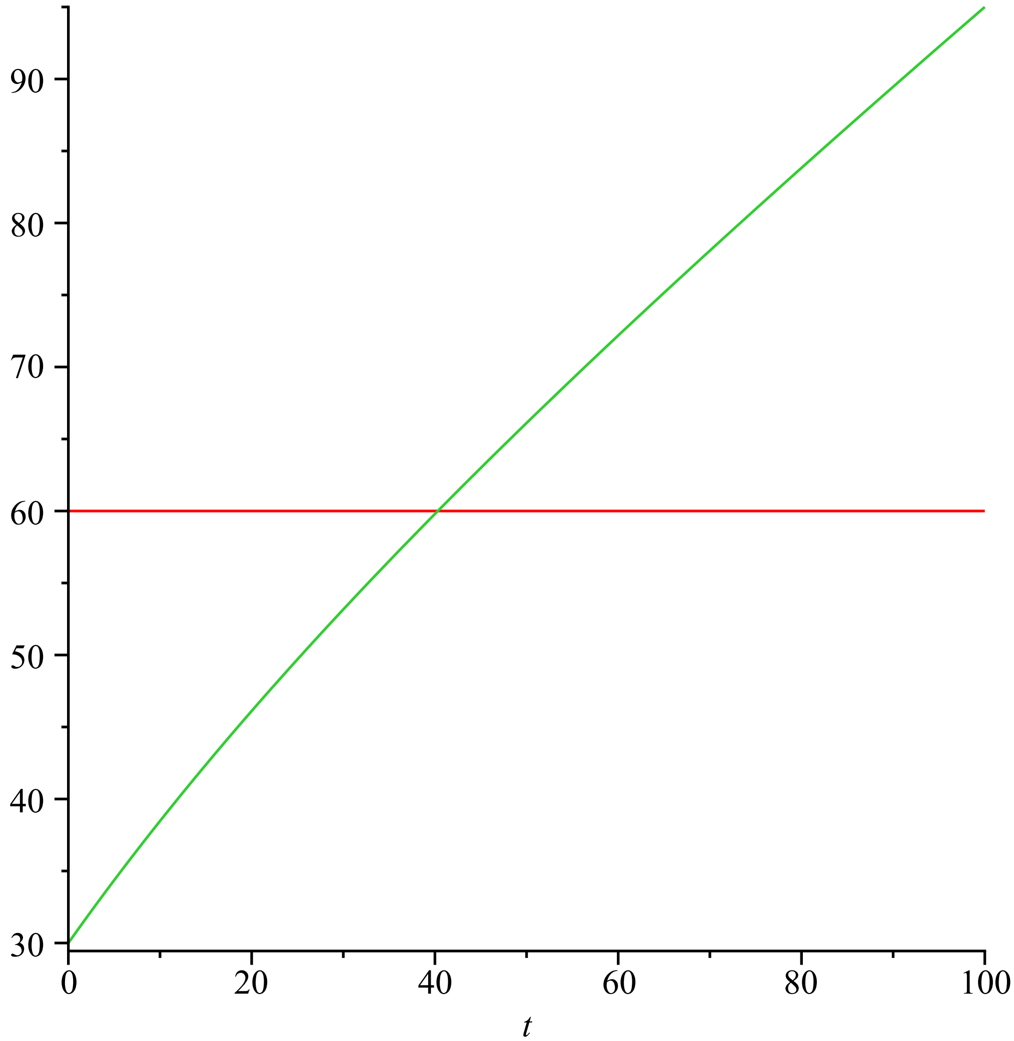
b)

Hvornår er der 60 kg salt i karret?

> $fsolve(rhs(\mathbf{(1.3)}) = 60, t)$

$$40.31626828 \quad \mathbf{(2.1)}$$

> $plot(\{rhs(\mathbf{(1.3)}), 60\}, t = 0 ..100)$



Konklusion: Der er 60 kg salt i karret efter ca. $\underline{\underline{40.3\ \textit{minutter}}}$