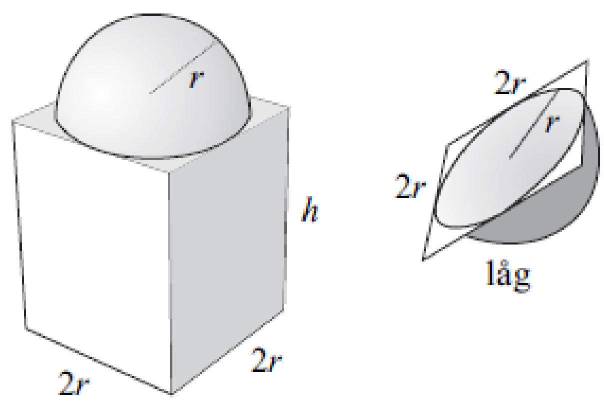
STX A, 31/5-2012, opgave 14, spørgsmål c



Fra formelsamling.
En kugle med radius r har

Volumen : $\frac{4\pi}{3}\cdot r^3$

Overfladeareal: $4\pi \cdot r^2$

En bestemt type beholder har form som en kasse med kvadratisk bund og et hult låg, der har form som en halvkugle sammensat med et kvadrat.

a) Bestem beholderens volumen udtrykt ved r og h.

Beholderens volumen er 5.

b) Bestem h udtrykt ved r, og gør rede for, at overfladen af beholderen udtrykt ved r er givet ved

$$O(r) = \frac{10}{r} + \left(8 - \frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2.$$

c) Bestem r, så beholderens overfladeareal bliver mindst muligt, idet $0 < r < 50$.

> *restart*

a)

Beholderen består af en kasse samt en halvkugle.

> $Volume := (2\cdot r)\cdot(2\cdot r)\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot r^3$

$$Volume := 4\,r^2\,h + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 \tag{1.1}$$

Rumfanget = volumen = $\underline{\underline{4\cdot r^2\cdot h + \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3}}$

b)

Rumfanget er 5.
h ønskes udtrykt ved r.

> $h := solve(Volume = 5, h)$

$$h := -\frac{1}{12}\,\frac{-15+2\,\pi\,r^3}{r^2} \tag{2.1}$$

h udtrykt ved r : $\underline{\underline{h = -\frac{1}{12}\cdot\frac{-15+2\cdot\pi\cdot r^3}{r^2}}}$

Overfladearealet skal bestemmes.
Opdeles i top (minus cirkelskive) + bund (kvadrater), 4 sideflader, halvkugleflade:

> $OverfladeAreal := 2\cdot(2\cdot r)\cdot(2\cdot r)+4\cdot(2\cdot r)\cdot h-\pi\cdot r^2+\frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\pi\cdot r^2\right)$

$$OverfladeAreal := 8\,r^2-\frac{2}{3}\,\frac{-15+2\,\pi\,r^3}{r}+\pi\,r^2 \tag{2.2}$$

> $simplify(\%)$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{-24\,r^3-30+\pi\,r^3}{r} \tag{2.3}$$

Fortsætter med omskrivninger i hånden:

$$OverfladeAreal = -\frac{1}{3}\cdot\frac{-24\,r^3-30+\pi\,r^3}{r} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(-24+\pi)\cdot r^3-30}{r} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(24-\pi)\cdot r^3+30}{r}$$

$$= \frac{(24-\pi)}{3}\cdot r^2+\frac{10}{r} = \underline{\underline{\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2}}$$

c)

Definitionsmængden for *r* bestemmes:

> $solve(\{h>0, r>0\}, r);\ simplify(\%);\ evalf(\%)$

$$\left\{0<r,\ r<RootOf\left(-15+2\,\pi\,\_Z^3,\ index=1\right)\right\}$$

$$\left\{0<r,\ r<\frac{1}{2}\,\frac{15^{1/3}\,2^{2/3}}{\pi^{1/3}}\right\}$$

$$\{0.<r,\ r<1.336504618\} \tag{3.1}$$

Tallet $\frac{1}{2}\cdot\frac{15^{1/3}\,2^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{15\cdot 2^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{15\cdot 2^2}{2^3\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{15}{2\cdot\pi}}$,

hvilket også følger direkte af løsning af ligningen: $-15+2\,\pi\,\_Z^3=0$

Håndregning:

$$h>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\cdot\frac{-15+2\cdot\pi\cdot r^3}{r^2}>0 \Leftrightarrow -15+2\cdot\pi\cdot r^3<0 \Leftrightarrow r^3<\frac{15}{2\cdot\pi} \Leftrightarrow r<\sqrt[3]{\frac{15}{2\cdot\pi}}$$

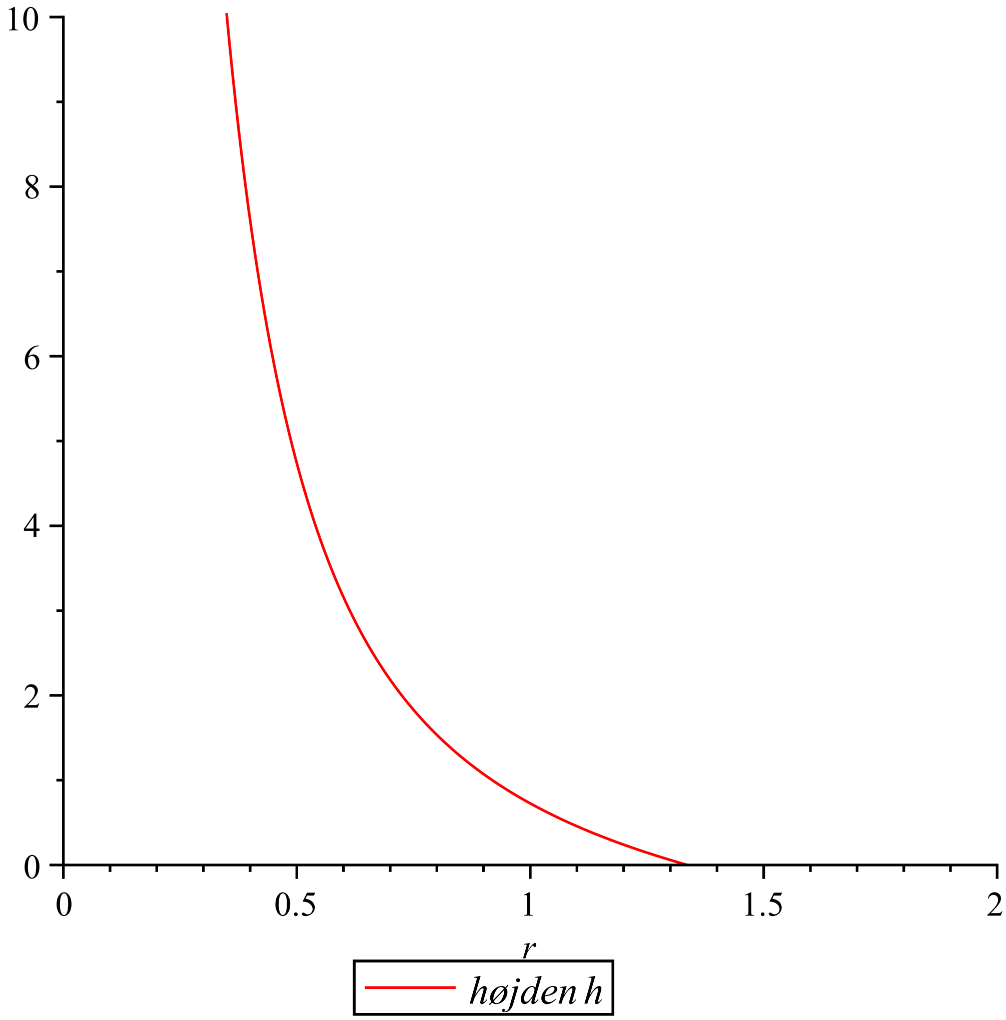
Dvs. definitionsmængden er:

$$\boxed{r \in \left]0; \sqrt[3]{\frac{15}{2 \cdot \pi}}\right[} \text{ eller ca. } r \in]0; 1.34[$$

Derfor er oplysningen i opgaven om, at $0 < r < 50$ helt vildledende !!!
Man kan naturligvis minimere det givne udtryk - det har bare intet med overfladearealet at gøre!

Korrekte løsning:

> $plot(h, r = 0 .. 1.336504618, view = [0 .. 2, 0 .. 10], legend = \text{"højden h"})$



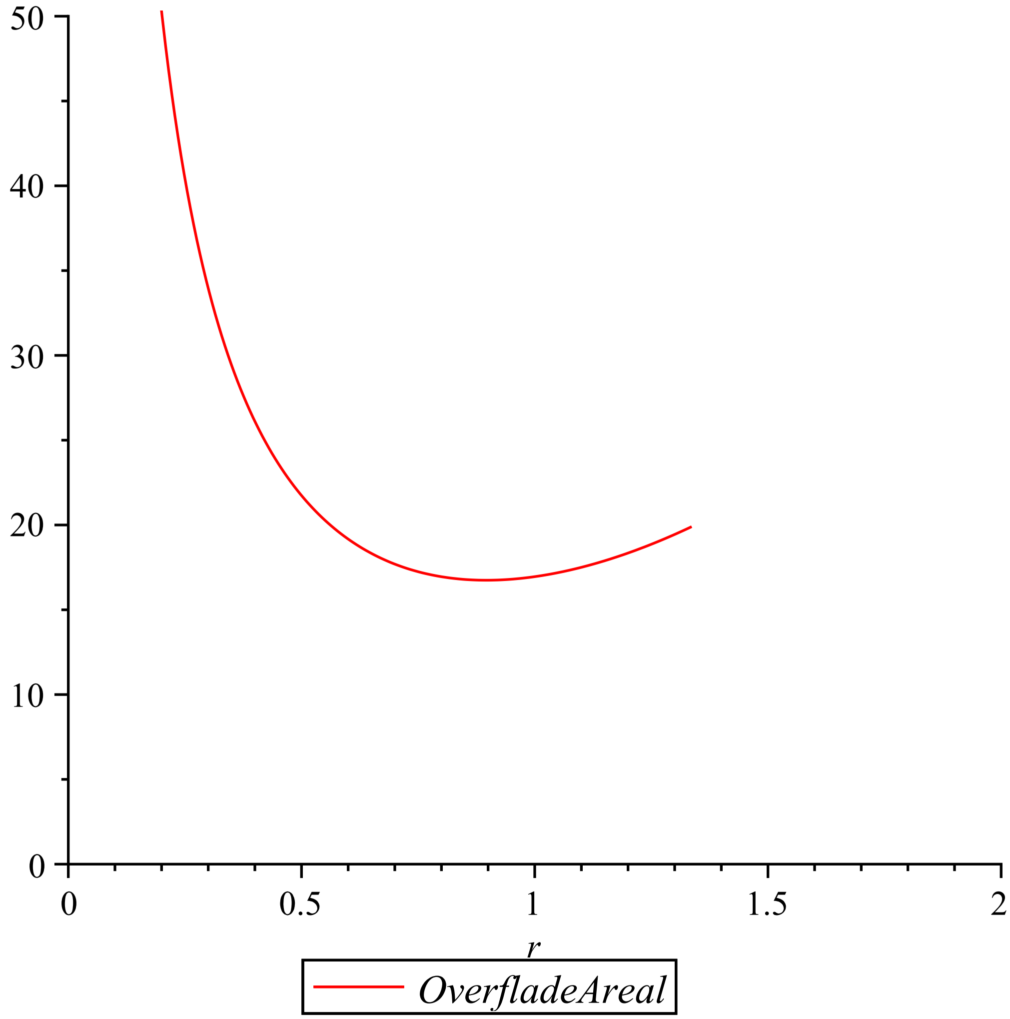
> $minimize\left(OverfladeAreal, r = 0 .. \sqrt[3]{\frac{15}{2 \cdot \pi}}, location\right); evalf(\%)$

$$\frac{8\ 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} - \frac{2}{45}\ (24-\pi)^{1/3}\ 15^{2/3}\left(-15 + \frac{30\ \pi}{24-\pi}\right) + \frac{\pi\ 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}}, \left\{\left[\left\{r = \frac{15^{1/3}}{(24-\pi)^{1/3}}\right\}, \frac{8\ 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} - \frac{2}{45}\ (24-\pi)^{1/3}\ 15^{2/3}\left(-15 + \frac{30\ \pi}{24-\pi}\right)\right.\right.$$

$$+ \frac{\pi\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} \Big] \Big] \Big\}$$

$$16.74253520,\ \{[\{r = 0.8959216636\},\ 16.74253520]\} \tag{3.2}$$

> *plot*(*OverfladeAreal*, *r* = 0 ..1.336504618, *view* = [0 ..2, 0 ..50], *legend* ="*OverfladeAreal*")



Test af opgaveformuleringen:

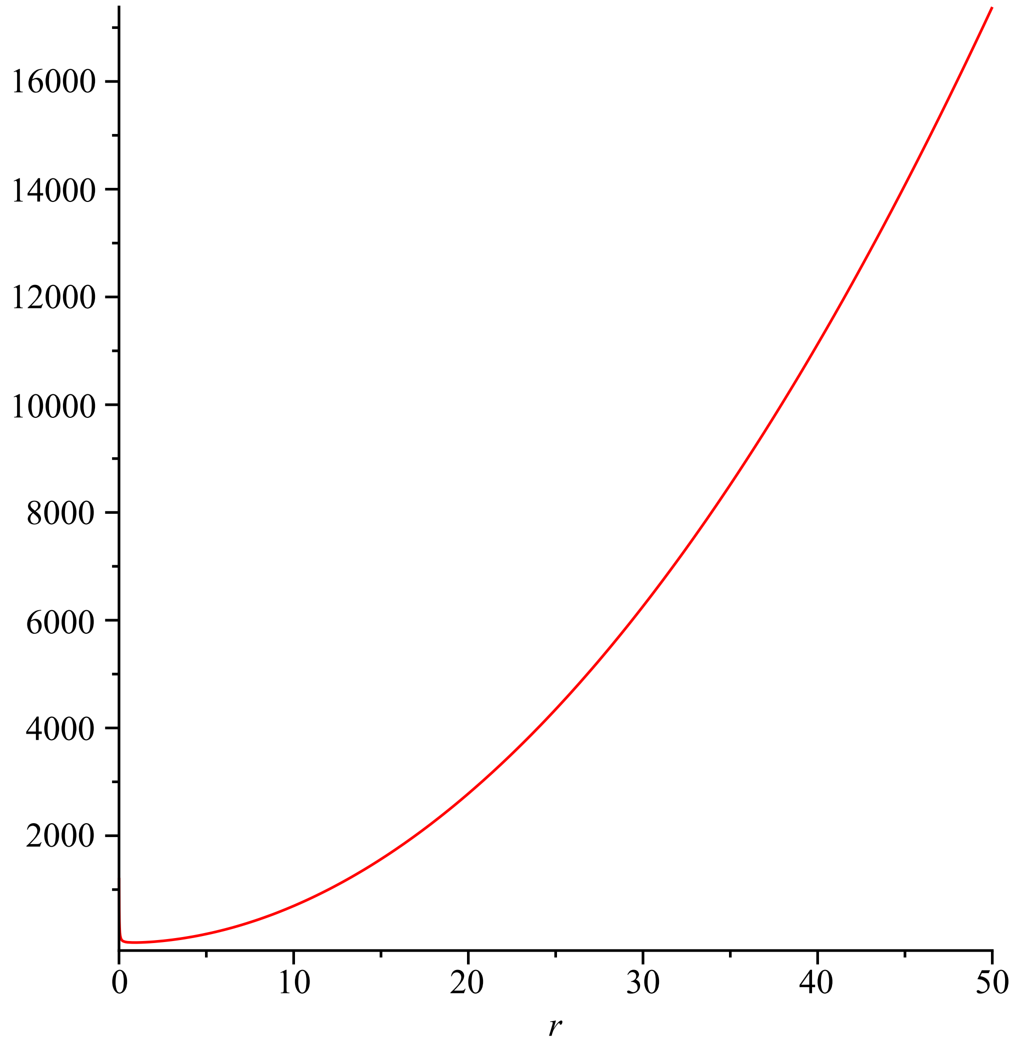
Den påtvungne løsning:

> *minimize*(*OverfladeAreal*, *r* = 0 ..50, *location*); *evalf*(%)

$$\frac{8\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} - \frac{2}{45}\,(24-\pi)^{1/3}\, 15^{2/3}\left(-15 + \frac{30\,\pi}{24-\pi}\right) + \frac{\pi\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}},\ \Big\{\Big[\Big[\Big\{r = \frac{15^{1/3}}{(24-\pi)^{1/3}}\Big\},\ \frac{8\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} - \frac{2}{45}\,(24-\pi)^{1/3}\, 15^{2/3}\left(-15 + \frac{30\,\pi}{24-\pi}\right) + \frac{\pi\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}}\Big]\Big]\Big\}$$

$$16.74253520,\ \{[\{r = 0.8959216636\},\ 16.74253520]\} \tag{3.3}$$

> *plot*(*OverfladeAreal*, *r* = 0 ..50)



Dvs. overfladearealet er mindst muligt, når $r = \sqrt[3]{\frac{15}{24-\pi}} \approx 0.896$

Det mindste overfladeareal er

$$\frac{8\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} - \frac{2}{45}\,(24-\pi)^{1/3}\, 15^{2/3}\left(-15 + \frac{30\,\pi}{24-\pi}\right) + \frac{\pi\, 15^{2/3}}{(24-\pi)^{2/3}} \approx 16.74$$