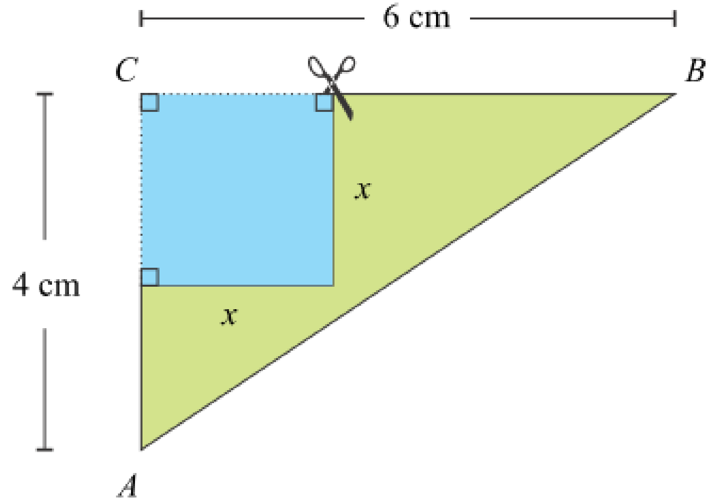
Eksamen matematik, stx A net, 23. maj 2017

UDEN HJÆLPEMIDLER

Opgave 8 - trekant



Et stykke papir har form som en retvinklet trekant ABC, hvor kateternes sidelængder er henholdsvis 4 cm og 6 cm. Ved trekantens retvinklede hjørne udklippes et kvadrat med sidelængden x, som vist på figuren.

a) Bestem arealet af det tiloversblevne stykke papir udtrykt ved x, når $0 < x < 4$.

b) Bestem den største sidelængde x, som kvadratet kan få ved et sådant udklip.

a)

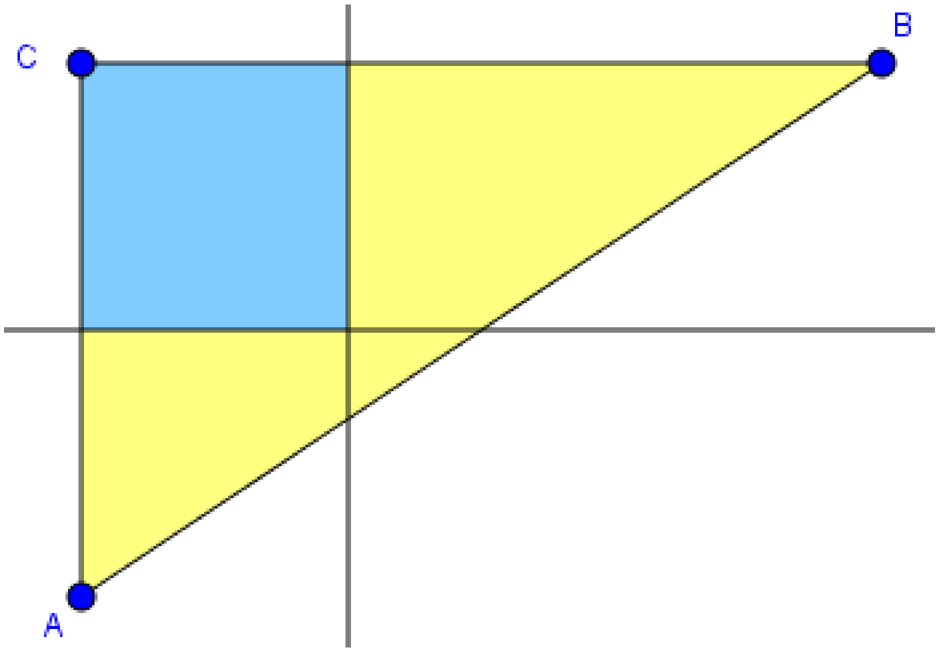
Umiddelbart: arealet af tiloversblevne stykke papir er $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - x \cdot x = \underline{\underline{12 - x^2}}$ (enhed: cm^2)

Men formlen gælder kun for et mindre definitionsområde, idet trekanten ellers opdeles i 2 stykker papir!
Så det er misvisende, at arealet skal findes for $0 < x < 4$.

Formlen $12 - x^2$ gælder kun for $0 < x < \frac{12}{5}$ i følge beregningen i spørgsmål b) nedenfor.

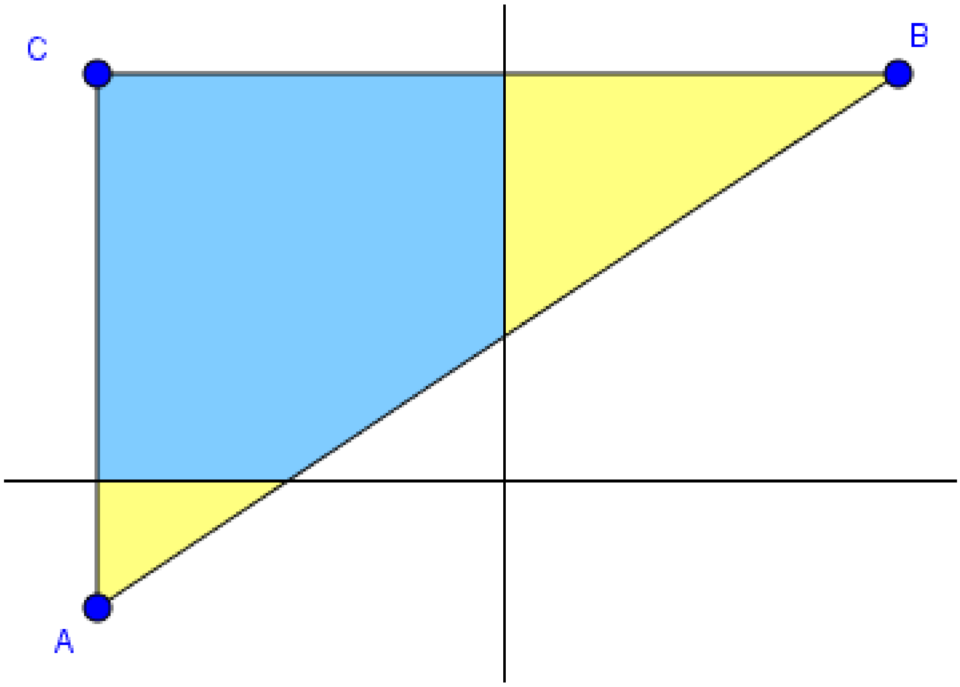
Nu gennemregnes ikke bare de 2 områder fra 0 til 2.4 og 2.4 til 4, men også 4 til 6.

$0 < x < \frac{12}{5}$



Arealet er som vist ovenfor $\mathbf{12 - x^2}$

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}} < x < 4$$

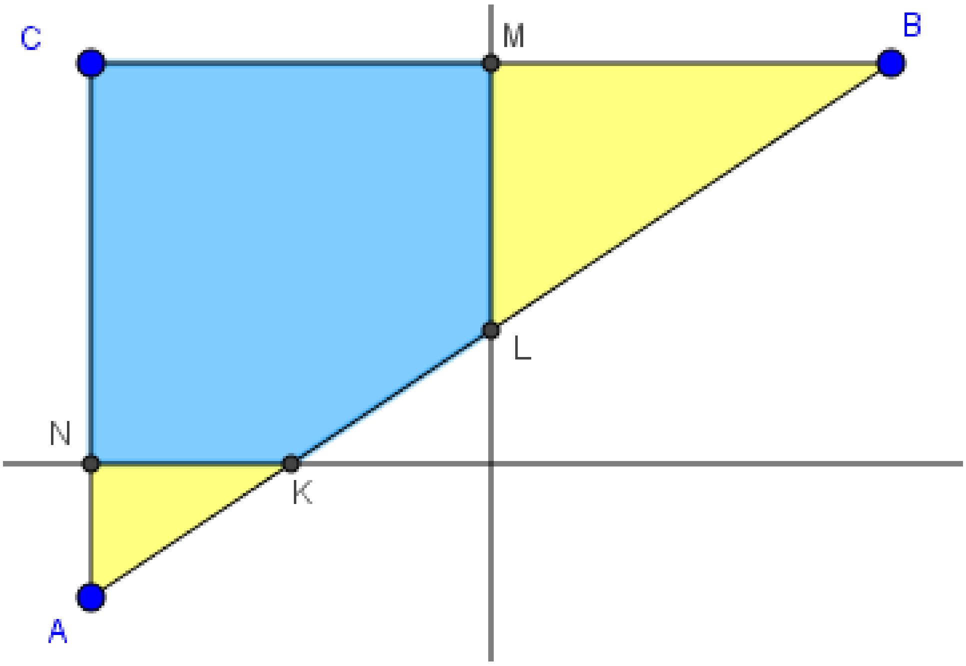


Hvis man tager $0 < x < 4$ seriøst, så skal man i gang med at finde arealet af de 2 gule trekanter, når $\frac{12}{5} < x < 4$!

Nu kalder jeg x'et i opgaven for z, som er et positivt tal!

Lægger *origo* i A.

Linjen gennem A og B har ligningen: $y = \frac{4}{6} \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x$.



Den vandrette linje $y = 4 - z$ skærer linjen gennem A og B.

Skæringspunktets x-værdi er så: $4 - z = \frac{2}{3} \cdot x \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x = 4 - z \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \cdot (4 - z)$

Nederste gule trekant ΔANK:

Det vandrette stykke KN i nederste trekant er så: $\frac{3}{2} \cdot (4 - z)$

Det lodrette stykke AN i nederste trekant er så: $4 - z$

Arealet af nederste gule trekant ΔANK er så:

$$\frac{1}{2} \cdot (4 - z) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot (4 - z) \right) = \frac{3}{4} \cdot (4 - z)^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(16 + z^2 - 8 \cdot z \right) = \frac{3}{4} \cdot z^2 - 6 \cdot z + 12$$

Øverste gule trekant ΔBLM:

Her er skæringspunktet i $x = z$.

Dvs. den vandrette stykke BM i den øverste trekant er $6 - z$.

y-værdien for skæringspunktet mellem lodrette linje og linjen gennem A og B er givet ved: $y = \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot z$

Den vandrette katete BM i den øverste trekant har så længden $6 - z$, og det lodrette stykke LM har længden $4 - \frac{2}{3} \cdot z$.

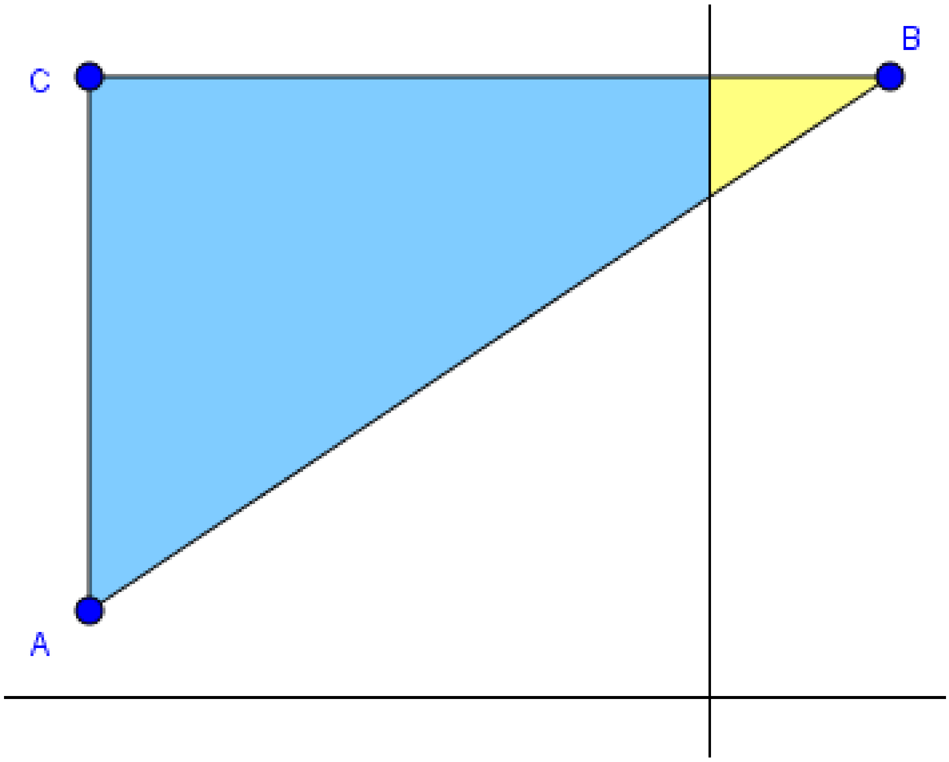
Arealet af øverste gule trekant ΔBLM er så:

$$\frac{1}{2} \cdot BM \cdot LM = \frac{1}{2} \cdot (6 - z) \cdot \left(4 - \frac{2}{3} \cdot z \right) = \left(3 - \frac{1}{2} \cdot z \right) \cdot \left(4 - \frac{2}{3} \cdot z \right) = 12 - 2 \cdot z - 2 \cdot z + \frac{1}{3} \cdot z^2 = \frac{1}{3} \cdot z^2 - 4 \cdot z + 12$$

Det samlede areal af det tiloversblevne papir er så:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot z^2 - 6 \cdot z + 12 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot z^2 - 4 \cdot z + 12 \right) = \mathbf{\frac{13}{12} \cdot z^2 - 10 \cdot z + 24}$$

$4 < x < 6$?



I dette tilfælde findes kun den øverste trekant.

Så det tiloversblevne areal er så: $\frac{1}{3} \cdot z^2 - 4 \cdot z + 12$

Svaret på spørgsmål a) er hermed:

Konklusion: arealet af det tiloversblevne papir er for $0 < x < 4$ givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{for } 0 < x \le \frac{12}{5} \\ \frac{13}{12} \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24 & \text{for } \frac{12}{5} < x < 4 \end{cases}$$

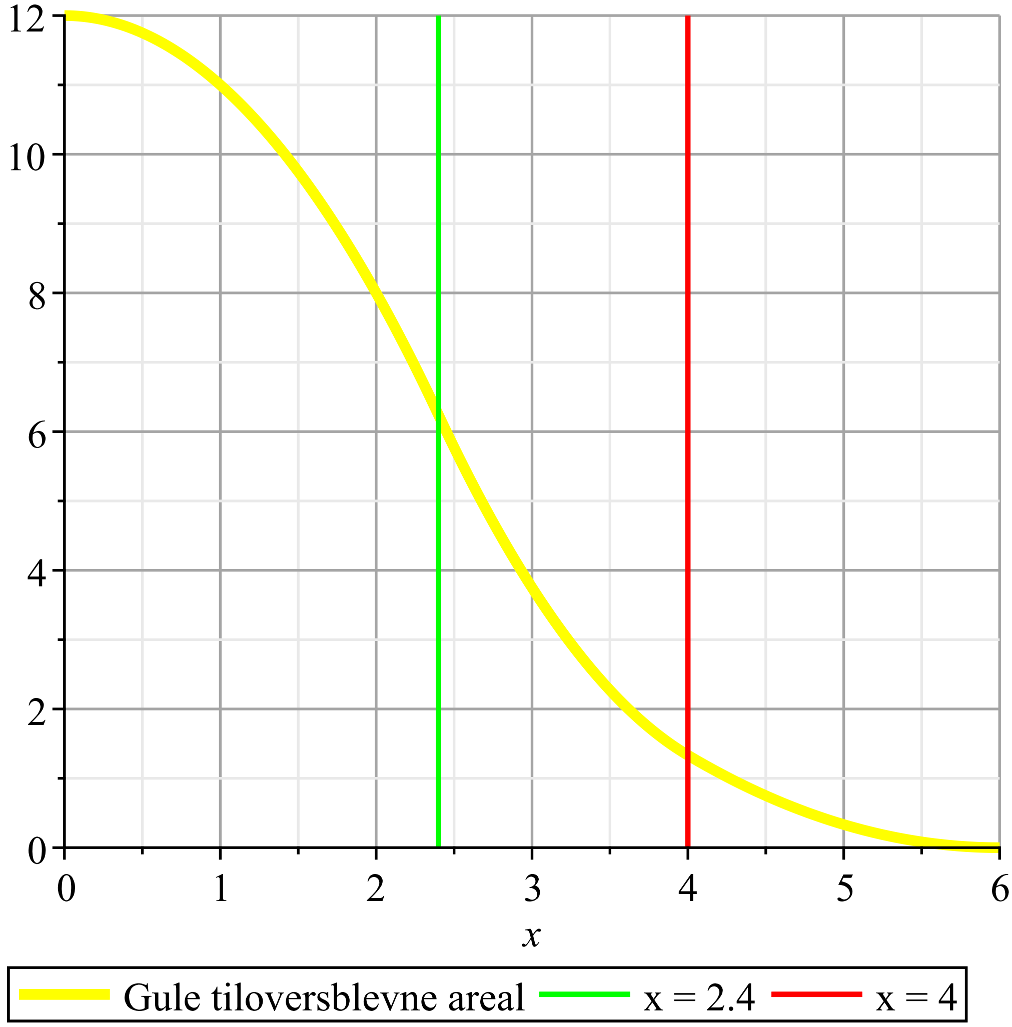
Hvis man anvender området det maksimale område $0 \le x \le 6$ så lyder forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{for } 0 \le x \le \frac{12}{5} \\ \frac{13}{12} \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24 & \text{for } \frac{12}{5} < x < 4 \\ \frac{1}{3} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 12 & \text{for } 4 \le x < 6 \end{cases}$$

Graf, hvor opdelingerne vises for $0 \le x \le 6$:

$$f(x) := \begin{cases} 12 - x^2 & 0 \le x \le \frac{12}{5} \\ \frac{13}{12} \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24 & \frac{12}{5} < x < 4 \\ \frac{1}{3} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 12 & 4 \le x < 6 \end{cases} :$$

with(*plots*) :
F := *plot*(*f*(*x*), *x* = 0 ..6, *gridlines*, *legend* = "Gule tiloversblevne areal", *color* = *yellow*, *thickness* = 4) :
X1 := *implicitplot*$\left(x = \frac{12}{5}\right.$, *x* = 2 ..3, *y* = 0 ..12, *color* = *green*, *thickness* = 2, *legend* = "x = 2.4"$\left.\right)$:
X2 := *implicitplot*(*x* = 4, *x* = 3 ..5, *y* = 0 ..12, *color* = *red*, *thickness* = 2, *legend* = "x = 4") :
display(*F*, *X1*, *X2*)



b)

Regner på situationen, hvor det blå kvadrat netop rører hypotenusen i trekanten.
Den givne trekant er så opdelt i 3 dele: et blåt kvadrat, og to gule retvinklede trekanter.
Kvadratet har sidelængderne x, mens den nederste trekant har kateterne x og 4-x, den øverste trekant har kateterne x og 6-x.

Samlede areal af trekanten opfylder så ligningen, at arealet af ΔABC er sum af de 3 delarealer:

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6 = x\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x\cdot(6-x) \Leftrightarrow 12 = x^2 + 2\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + 3\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 \Leftrightarrow$$

$$12 = 5\cdot x \Leftrightarrow x = \frac{12}{5} = 2.4$$

<u>alternativ</u>:

Når kvadratet netop rører hypotenusen er de 2 gule retvinklede trekanter ensvinklede.
Så kan man opskrive forholdet mellem ensliggende sider:

$$\frac{x}{4-x} = \frac{6-x}{x} \Leftrightarrow x^2 = (6-x)\cdot(4-x) \Leftrightarrow x^2 = 24 - 4\cdot x - 6\cdot x + x^2 \Leftrightarrow 0 = 24 - 10\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot x = 24 \Leftrightarrow x = 2.4$$

Dvs. den største værdi, som x kan antage er $\underline{\underline{\frac{12}{5} = 2.4}}$ **.** Ellers opdeles papiret i 2 trekanter!