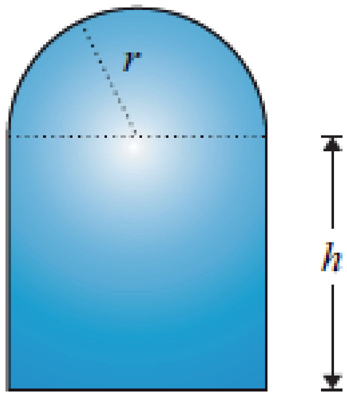
STX-B 27. maj 2016, opgave 11



En bestemt type vindue er sammensat af en halvcirkel med radius r og et rektangel med højde h og bredde $2r$ (se figuren). Alle længder måles i meter.

a) Bestem vinduets omkreds og areal, når $h = 1{,}4$ og $r = 0{,}7$.

Det oplyses, at arealet A af et vindue af den betragtede type kan beskrives ved følgende funktion af r

$$A(r) = 6 \cdot r - \tfrac{1}{2} \cdot (\pi + 4) \cdot r^2, \quad 0 < r < 1.$$

b) Bestem den værdi af r, der gør arealet af vinduet størst muligt.

> *restart*

a)

De kendte størrelser indtastes:

> $h := 1.4; r := 0.7$

$$h := 1.4$$
$$r := 0.7 \qquad (1.1.1)$$

Omkredsen opdeles i 3 rette linjestykker samt halvcirklen:

> $Omkreds := h + h + 2 \cdot r + \pi \cdot r$

$$Omkreds := 6.399114858 \qquad (1.1.2)$$

Konklusion: omkredsen er ca. $\underline{\underline{6.40\ m}}$

> $Areal := h \cdot (2 \cdot r) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

$$Areal := 2.729690200 \qquad (1.1.3)$$

Konklusion: arealet er ca. $\underline{\underline{2.73\ m^2}}$

b)

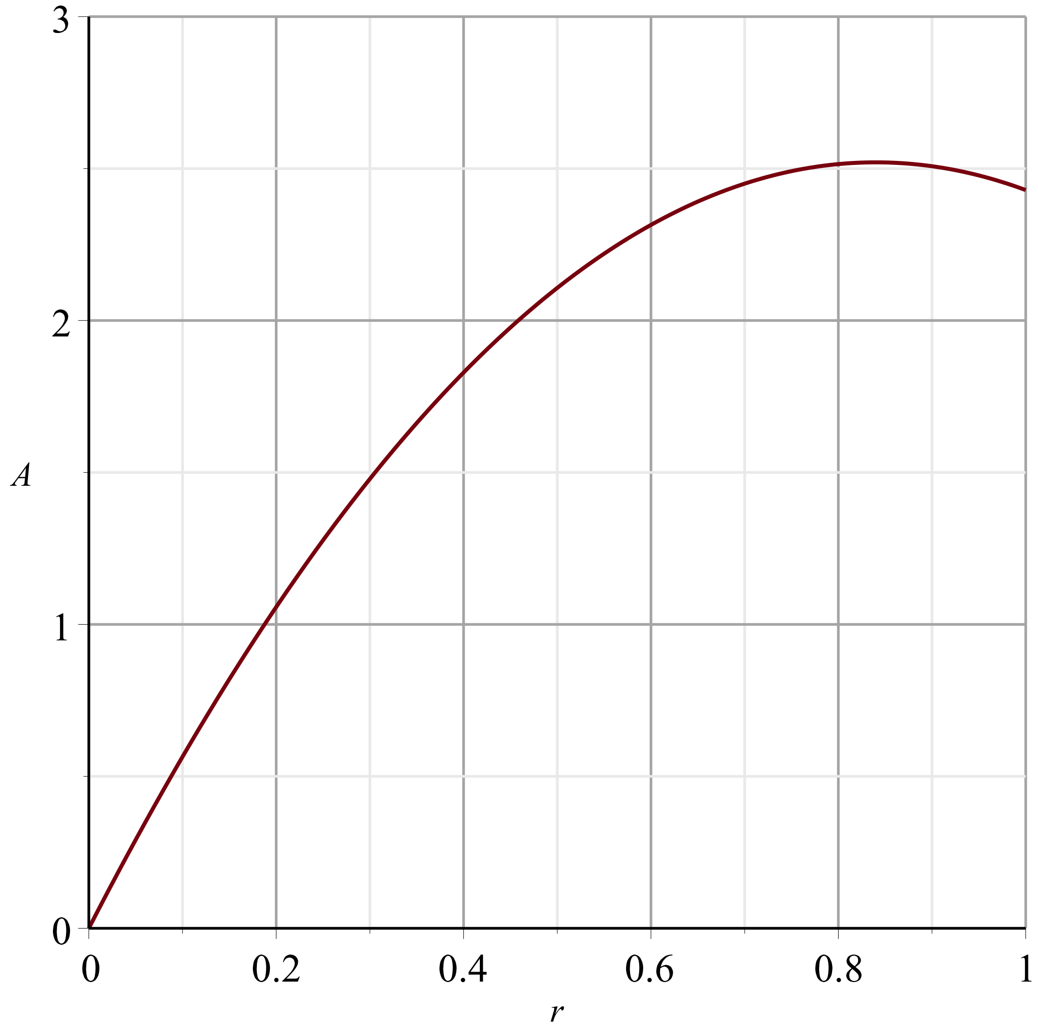
> $unassign('r')$

> $A := r \rightarrow 6 \cdot r - \frac{1}{2} \cdot (\pi + 4) \cdot r^2$

$$(1.2.1)$$

$$A := r \rightarrow 6\,r - \left(\frac{1}{2}\,\pi + 2\right) r^2 \tag{1.2.1}$$

> *plot*(*A*(*r*), *r* = 0 ..1, *A* = 0 ..3, *gridlines*)



> *maximize*(*A*(*r*), *r* = 0 ..1, *location*); *evalf*(%)

$$\frac{36}{\pi+4} - \frac{36\left(\frac{1}{2}\,\pi+2\right)}{(\pi+4)^2},\ \left\{\left[\left\{r = \frac{6}{\pi+4}\right\},\ \frac{36}{\pi+4} - \frac{36\left(\frac{1}{2}\,\pi+2\right)}{(\pi+4)^2}\right]\right\}$$

$$2.520446192,\ \{[\{r = 0.8401487304\},\ 2.520446192]\} \tag{1.2.2}$$

<u>eller</u>:

> *solve*({*A*'(*r*) = 0, *r* ≥ 0, *r* ≤ 1}, *r*); *evalf*(%)

$$\left\{r = \frac{6}{\pi+4}\right\}$$

$$\{r = 0.8401487304\} \tag{1.2.3}$$

> *solve*({*A*'(*r*) > 0, *r* ≥ 0, *r* ≤ 1}, *r*); *evalf*(%)

$$\left\{0 \le r,\ r < \frac{6}{\pi+4}\right\}$$

$$\{0. \le r,\ r < 0.8401487304\} \tag{1.2.4}$$

> *solve*({*A*'(*r*) < 0, *r* ≥ 0, *r* ≤ 1}, *r*); *evalf*(%)

$$\left\{r \le 1,\ \frac{6}{\pi+4} < r\right\}$$

(1.2.5)

$\{r \leq 1., 0.8401487304 < r\}$ **(1.2.5)**

$A(r)$ er voksende fra 0 til $\frac{6}{\pi+4} \approx 0.84$, og aftagede fra $\frac{6}{\pi+4} \approx 0.84$ frem til 1.

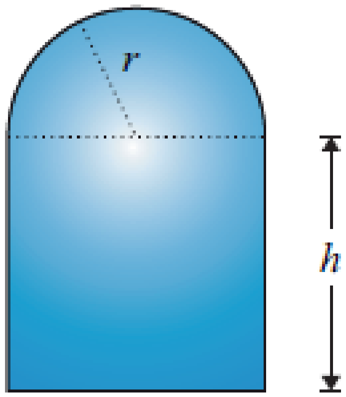
Konklusion: arealet af vinduet er maksimalt, når $r = \frac{6}{\pi+4} \approx 0.84$

Men det er mystisk, at det maksimale areal fundet under spørgsmål (b) er ca. 2.52 m^2.

For arealet fundet i spørgsmål (a) var ca. 2.73 m^2.

Så vinduet er åbenbart ikke af samme type, som det man regner på i spørgsmål (a)!

Men hvad er det så?



Arealet af vinduet generelt er givet ved (rektangel + halvcirkel): $h \cdot (2 \cdot r) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

Dette sammenlignes så med det angivne udtryk: $6 \cdot r - \frac{1}{2} \cdot (\pi+4) \cdot r^2$

Sættes lig med hinanden:

$h \cdot (2 \cdot r) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 6 \cdot r - \frac{1}{2} \cdot (\pi+4) \cdot r^2 \Leftrightarrow$

$h \cdot 2 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 6 \cdot r - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \Leftrightarrow$

$h \cdot 2 \cdot r = 6 \cdot r - \pi \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \Leftrightarrow$

$h = \frac{6 \cdot r - \pi \cdot r^2 - 2 \cdot r^2}{2 \cdot r} \Leftrightarrow$

$h = 3 - \frac{\pi}{2} \cdot r - r \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{h = 3 - \frac{\pi+2}{2} \cdot r}$$

Det var dog en mystisk sammenhæng.
Virker som ren gæt.
Man skulle nok have en funktion $A(r)$, som har et maksimum indenfor $0 < r < 1$.

NB: når $0 < r < 1$, så vil h ligge mellem ca. 0.43 og 3. Så det giver trods alt mening.

> $evalf\left(3 - \frac{\pi + 2}{2} \cdot 0\right)$

$$3. \tag{1.2.6}$$

> $evalf\left(3 - \frac{\pi + 2}{2} \cdot 1\right)$

$$0.429203673 \tag{1.2.7}$$