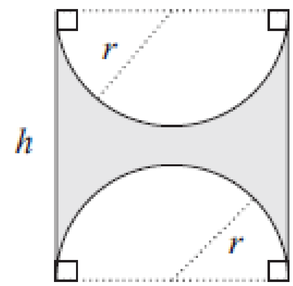
STX B, 31. maj 2012, opgave 12, spørgsmål b

Et stykke metal har form som et rektangel med sidelængderne h og $2r$.
To halvcirkler med radius r skæres ud af metalstykket som vist på figuren.
Det tilbageværende metalstykke har omkredsen 6.



a) Bestem h udtrykt ved r, og gør rede for, at arealet af det tilbageværende metalstykke som funktion af r kan beskrives ved

$$A(r) = 6r - 3\pi r^2.$$

b) Bestem r, så metalstykkets areal bliver størst muligt.

> *restart*

a)

> $Omkreds := h + h + \pi \cdot r + \pi \cdot r$

$$Omkreds := 2\,h + 2\,\pi\,r \qquad \textbf{(1.1)}$$

> $Areal := h \cdot (2 \cdot r) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2\right)$

$$Areal := 2\,h\,r - \pi\,r^2 \qquad \textbf{(1.2)}$$

> $h := solve(Omkreds = 6, h)$

$$h := 3 - \pi\,r \qquad \textbf{(1.3)}$$

Konklusion: h udtrykt ved r lyder $\underline{\underline{h = 3 - \pi \cdot r}}$

> $Areal$

$$2\,(3 - \pi\,r)\,r - \pi\,r^2 \qquad \textbf{(1.4)}$$

> $expand(Areal)$

$$6\,r - 3\,\pi\,r^2 \qquad \textbf{(1.5)}$$

Konklusion: arealet udtrykt ved r er $\underline{\underline{6 \cdot r - 3 \cdot \pi \cdot r^2}}$

b)

Definitionsområdet for r bestemmes:

Krav: (hvis ikke $h > 2 \cdot r$, så er der ikke **ét** tilbageværende metalstykke!)
$r > 0$
og

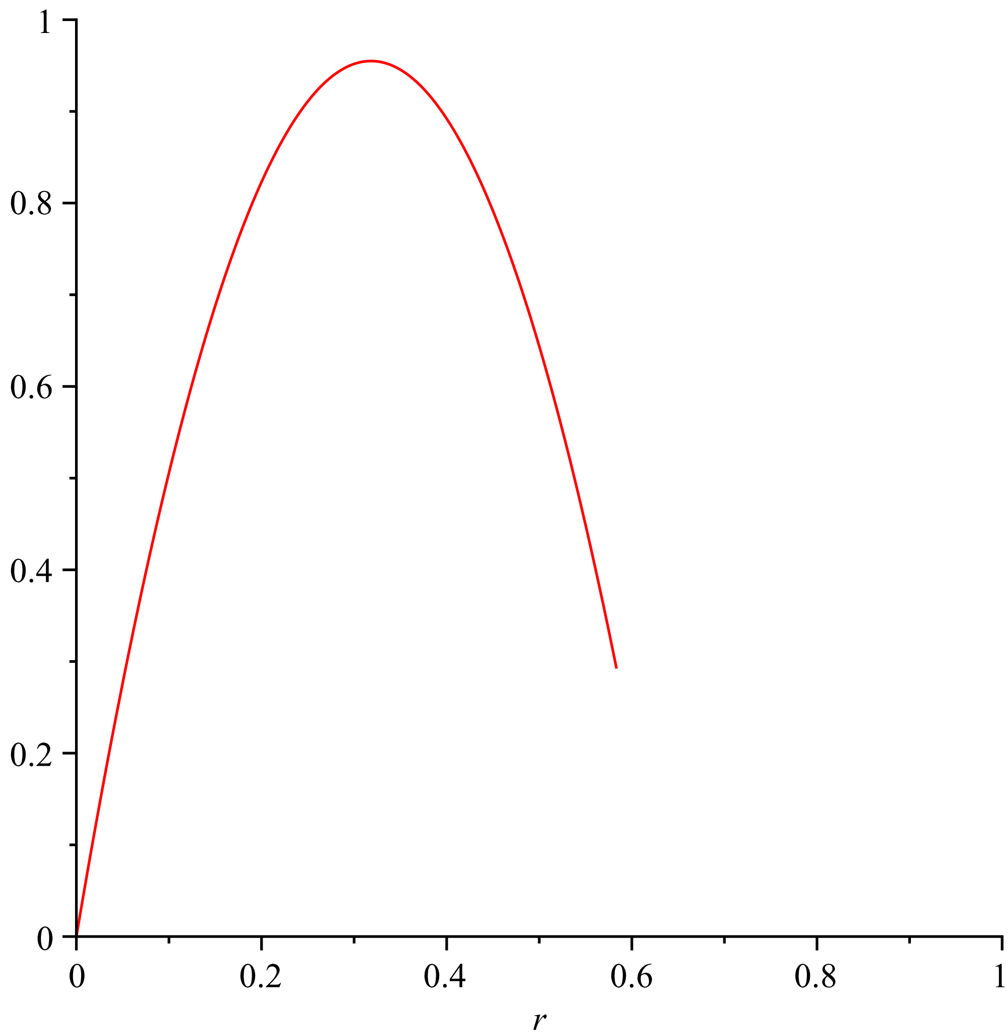
$$h > 2 \cdot r \Leftrightarrow 3 - \pi \cdot r > 2 \cdot r \Leftrightarrow 3 > (2 + \pi) \cdot r \Leftrightarrow r < \frac{3}{2 + \pi}$$

altså er definitionsområdet for r givet ved: $0 < r < \frac{3}{2 + \pi} \approx 0.583$

> $evalf\left(\frac{3}{2 + \pi}\right)$

$$0.5834767944 \tag{2.1}$$

> $plot(Areal, r = 0 .. \mathbf{(2.1)}, view = [0 .. 1, 0 .. 1])$



Positivitetsområdet for *r* bestemmes:

> $solve(Areal > 0, r)$

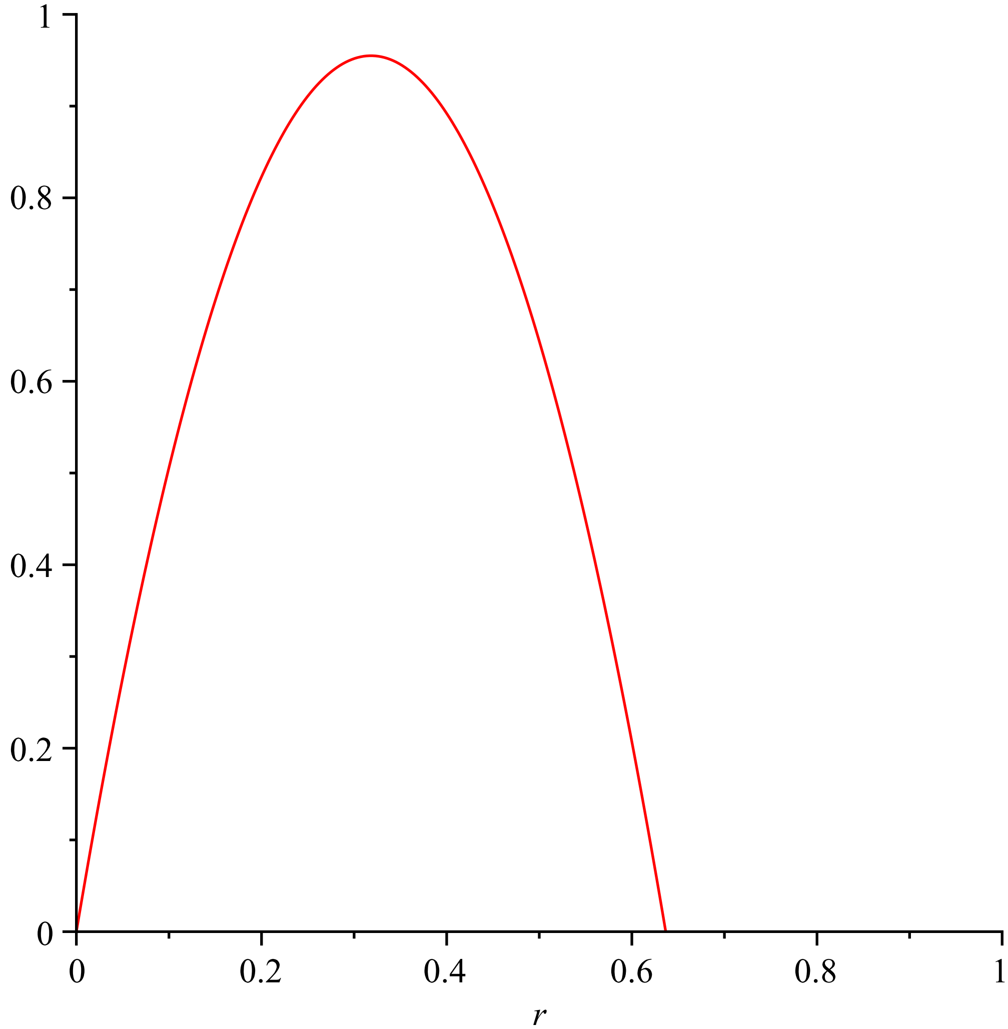
$$RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) \tag{2.2}$$

> $evalf\left(\frac{2}{\pi}\right)$

$$0.6366197722 \tag{2.3}$$

Dvs. $\boldsymbol{Areal > 0}$ **for** $\boldsymbol{0 < r < \frac{2}{\pi} \approx 0.637}$

> $plot(Areal, r = 0 .. \mathbf{(2.3)}, view = [0 .. 1, 0 .. 1])$



Arealet ønskes størst muligt:

Korrekt metode:

> $maximize\left(Areal, r = 0 .. \frac{3}{2+\pi}, location\right); evalf(\%)$

$$\frac{3}{\pi}, \left\{\left[\left\{r = \frac{1}{\pi}\right\}, \frac{3}{\pi}\right]\right\}$$

$$0.9549296583, \{[\{r = 0.3183098861\}, 0.9549296583]\} \quad \mathbf{(2.4)}$$

Test med positivitetsområdet:

> $maximize\left(Areal, r = 0 .. \frac{2}{\pi}, location\right); evalf(\%)$

$$\frac{3}{\pi}, \left\{\left[\left\{r = \frac{1}{\pi}\right\}, \frac{3}{\pi}\right]\right\}$$

$$0.9549296583, \{[\{r = 0.3183098861\}, 0.9549296583]\} \quad \mathbf{(2.5)}$$

Test med alle positive tal:

> $maximize(Areal, r = 0..\infty, location);\ evalf(\%)$

$$\frac{3}{\pi}, \left\{\left[\left\{r = \frac{1}{\pi}\right\}, \frac{3}{\pi}\right]\right\}$$

$$0.9549296583, \{[\{r = 0.3183098861\}, 0.9549296583]\} \quad \textbf{(2.6)}$$

Konklusion: Arealet er størst, når $r = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$

Det største areal er $\frac{3}{\pi} \approx 0.955$