Bernoulli-type 1. ordens ordinær differentialligning

En differentialligning af **Bernoulli**-typen har formen: $y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y$

Hvis $\alpha = 0$ eller $\alpha = 1$, så er differentialligningen **lineær**, og kan dermed løses med "panserformlen".

Generel metode ($\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$)

1. Givet en differentialligningen af Bernoulli-typen: $y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y$
2. Indfør en ny variabel z: $z = y^{1-\alpha}$
3. Ved substitution fremkommer en **lineær** differentialligning i z:
   $z' = -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)$
4. Løs denne **lineære** differentialligning i z med "panserformlen"
5. Gå tilbage til den oprindelige variabel y, som er givet ved $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Bevis

Den nye variabel introduceres:

$$z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Udtrykket for y indsættes i $y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y$ og der reduceres og omskrives:

$$\left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = g(x) \cdot \left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} - f(x) \cdot \left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot z' = g(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - f(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' = g(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - f(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' = g(x) \cdot \frac{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} - f(x) \cdot \frac{z^{\frac{1}{1-\alpha}}}{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' = g(x) - f(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' = g(x) - f(x) \cdot z^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' = g(x) - f(x) \cdot z^{1} \Leftrightarrow$$

$$z' = (1-\alpha) \cdot g(x) - (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{z' = -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)}$$

Hermed er metoden bevist.

NB:

Hvis $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$, så bliver $z = y^{1-\alpha} = y^{1-1} = y^0 = 1$, dvs. z er slet ikke en variabel.

Og $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} = z^{\frac{1}{1-1}} = z^{\frac{1}{0}}$ giver ingen mening!

Hvis $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, så er $z = y^{1-\alpha} = y^{1-0} = y^1 = y$. Så er z identisk med y, så substitutionen giver ingen mening!