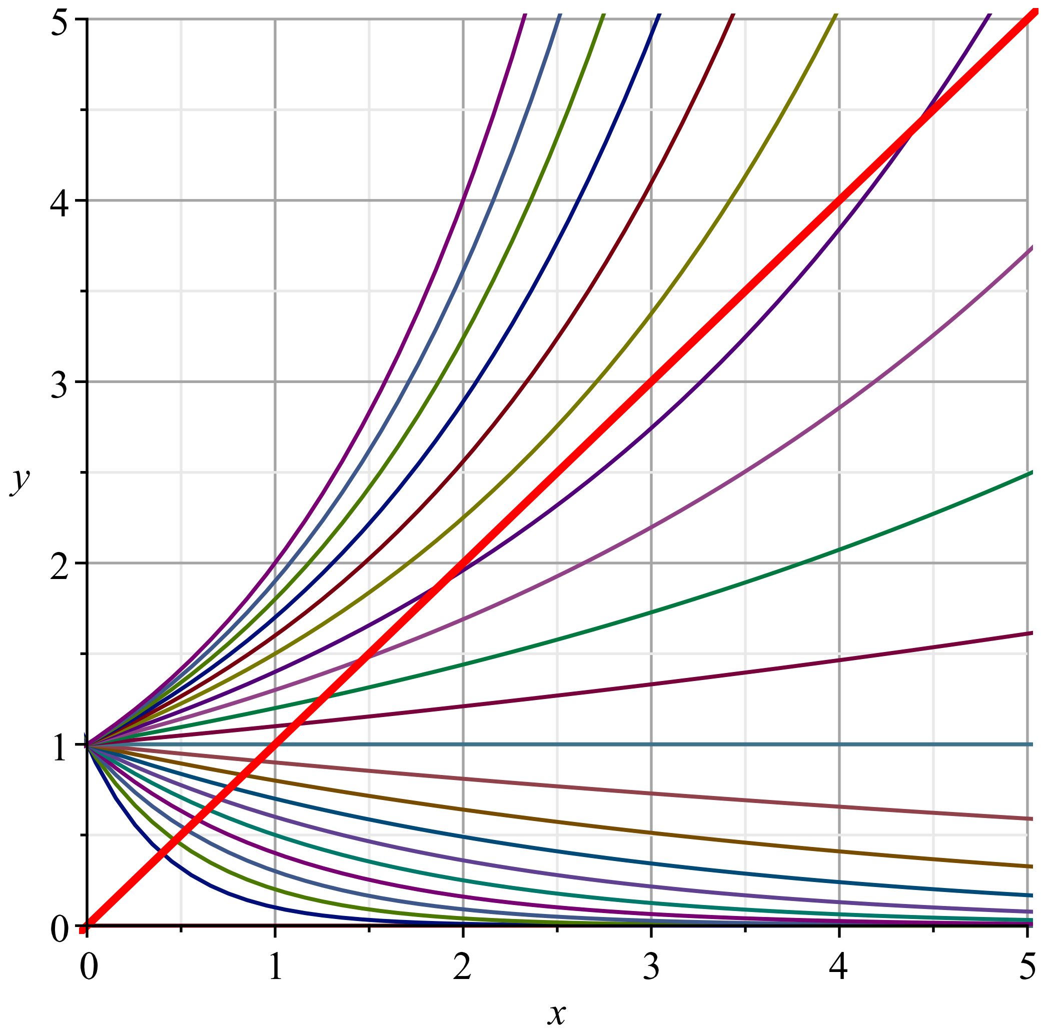
# Skæring mellem grafen for $a^x$ og linjen $y = x$

> *restart*

NB: Giver kun mening for $a > 0$ .

Plot med $a^x$ for $a = 0$ til $a = 2$ , i step på 0.1:

> *with*(*plots*) :
> $aixte := plot(\{seq(a^x, a = 0..2, 0.1)\}, gridlines)$ :
> $yligx := plot(x, color = red, thickness = 3, gridlines)$ :
> $display(aixte, yligx, view = [0..5, 0..5], labels = [x, y])$




Der ser ud til at være skæringspunkt mellem $y = x$ og grafen for $a^x$ , når $a$ ligger fra 0 og op til en vis værdi, hvor $y = x$ samtidig er tangent.
**Når $0 < a \leq 1$ er der 1 skæringspunkt.**
**Når $a > 1$ og op til "tangent-grænsen" er der 2 skæringspunkter.**

Hvor er grænsen, hvor $a^x$ har $y = x$ som tangent?

Der skal gælde, at de 2 hældningskoefficienter er ens, og at de 2 funktionsværdier er ens.

Beregning med Maple:

> $solve(\{(a^x)' = 1, a^x = x\}, \{x, a\})$

$$\left\{a = e^{\frac{1}{e}}, x = e\right\} \quad (1)$$

> $evalf\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$

$$1.444667861 \quad (2)$$

Tjek ved håndregning: $\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e} = e^{\frac{1}{e}\cdot e} = e^1 = e$

Tjek med Maple:

> $simplify\left(\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e}\right)$

$$e \quad (3)$$

eller tangentbestemmelse ved håndregning:

I: $(a^x)' = 1 \Leftrightarrow a^x \cdot \ln(a) = 1$

II: $a^x = x$ indsættes i I, og man får: $x \cdot \ln(a) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(a)}$

Denne værdi indsættes i II:

$$a^{\frac{1}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow \left(e^{\ln(a)}\right)^{\frac{1}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow e^{\ln(a)\cdot\frac{1}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow e^1 = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow e = \frac{1}{\ln(a)}$$

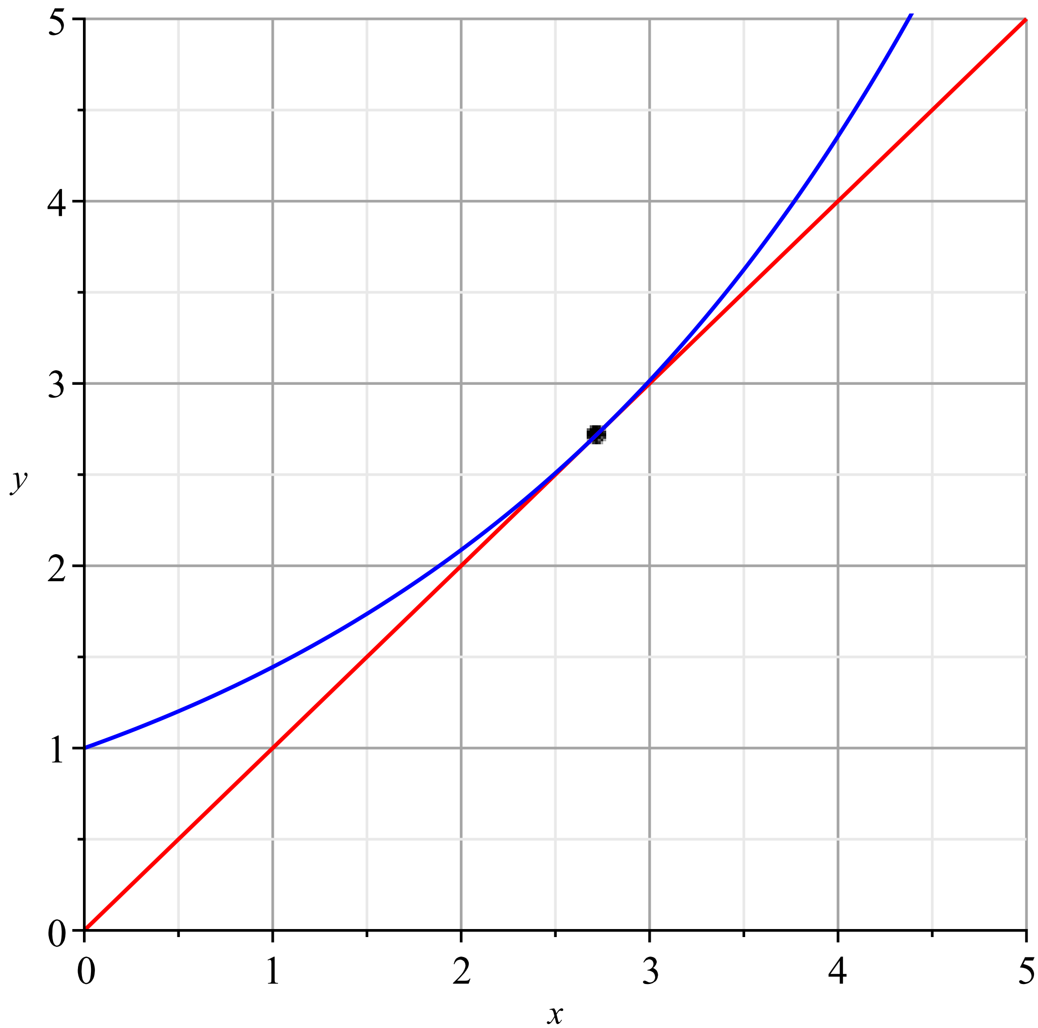
$$\Leftrightarrow \ln(a) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = e^{\frac{1}{e}}}}$$

Hermed bliver $x = \frac{1}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e}\cdot\ln(e)} = \frac{1}{\frac{1}{e}\cdot 1} = e$ dvs. $\underline{\underline{x = e}}$

**Konklusion:** når $\underline{\underline{a = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445}}$, så har for grafen for $a^x$ linjen $y = x$ som tangent

**Graf over tilfældet $a = e^{\frac{1}{e}}$ og $x = e$ :**

```
> graf := plot({(e^(1/e))^x, x}, x = 0..5, y = 0..5, color = [red, blue], gridlines) :
  punkt := pointplot([[e,e]], symbolsize = 12, symbol = solidcircle) :
  display(punkt, graf)
```




> $x_{\min} := solve(a^x = x, x)$

$$x_{\min} := -\frac{\mathrm{LambertW}(-\ln(a))}{\ln(a)} \tag{4}$$

Tjekker, at $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ giver den forventede løsning $x = \mathrm{e}$ :

> $subs\left(a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}, x_{\min}\right)$

$$-\frac{\mathrm{LambertW}\left(-\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)} \tag{5}$$

> $simplify(\mathbf{(5)})$

$$\mathrm{e} \tag{6}$$

Maple svarer med kun ét skæringspunkt, nemlig den mindste $x$-værdi, dvs. $x \leq \mathrm{e}$.

Ønsker at finde det andet skæringspunkt, som jo har en x-værdi større end e (idet $x = \mathrm{e}$ er tangentpunktet).

> $with(RealDomain)$ :
> $assume(a > 1)$ : $interface(showassumed = 0)$ :
> $solve(a^x = x, x)$;
> $unwith(RealDomain)$ :

$$-\frac{\text{LambertW}(-\_B1, -\ln(a))}{\ln(a)} \quad \textbf{(7)}$$

Maple finder 2 løsninger.

NB: $\_B1$ er en binær konstant, dvs. den er 0 eller 1.

Værdien 0 giver det venstre skæringspunkt, kaldet $x_{\text{min}}$ .
Værdien 1 giver det højre skæringspunkt, kaldet $x_{\text{max}}$.

> $x_{\text{max}} := subs(\_B1 = 1, \textbf{(7)})$

$$x_{\text{max}} := -\frac{\text{LambertW}(-1, -\ln(a))}{\ln(a)} \quad \textbf{(8)}$$

Når $\_B1 = 0$ er der tale om $x_{\text{min}}$ fra før, dvs. $\text{LambertW}(0, x) = \text{LambertW}(x)$.
Tjekker lige:

> $is\left(subs(\_B1 = 0, \textbf{(7)}) = x_{\text{min}}\right)$

$$true \quad \textbf{(9)}$$

> $is(\text{LambertW}(0, x) = \text{LambertW}(x))$

$$true \quad \textbf{(10)}$$

Lad f.eks. $a = 1.2$ , så bliver de 2 løsninger:

> $x_1 := evalf\left(-\frac{\text{LambertW}(-\ln(1.2))}{\ln(1.2)}\right)$

$$x_1 := 1.257734541 \quad \textbf{(11)}$$

Tjek:

> $1.2^{x_1} = x_1$

$$1.257734541 = 1.257734541 \quad \textbf{(12)}$$

> $x_2 := evalf\left(-\frac{\text{LambertW}(-1, -\ln(1.2))}{\ln(1.2)}\right)$

$$x_2 := 14.76745838 \quad \textbf{(13)}$$

Tjek:

> $1.2^{x_2} = x_2$

$$14.76745838 = 14.76745838 \quad \textbf{(14)}$$

<u>Grænseværdier generelt</u>:

> $\lim_{a \to e^{\frac{1}{e}}-} x_{\text{min}}$

$$e \quad \textbf{(15)}$$

> $\lim_{a \to 0+} x_{\text{min}}$

**(16)**

$$0 \quad (16)$$

> $\lim_{a \to e^{\frac{1}{e}}-} x_{max}$

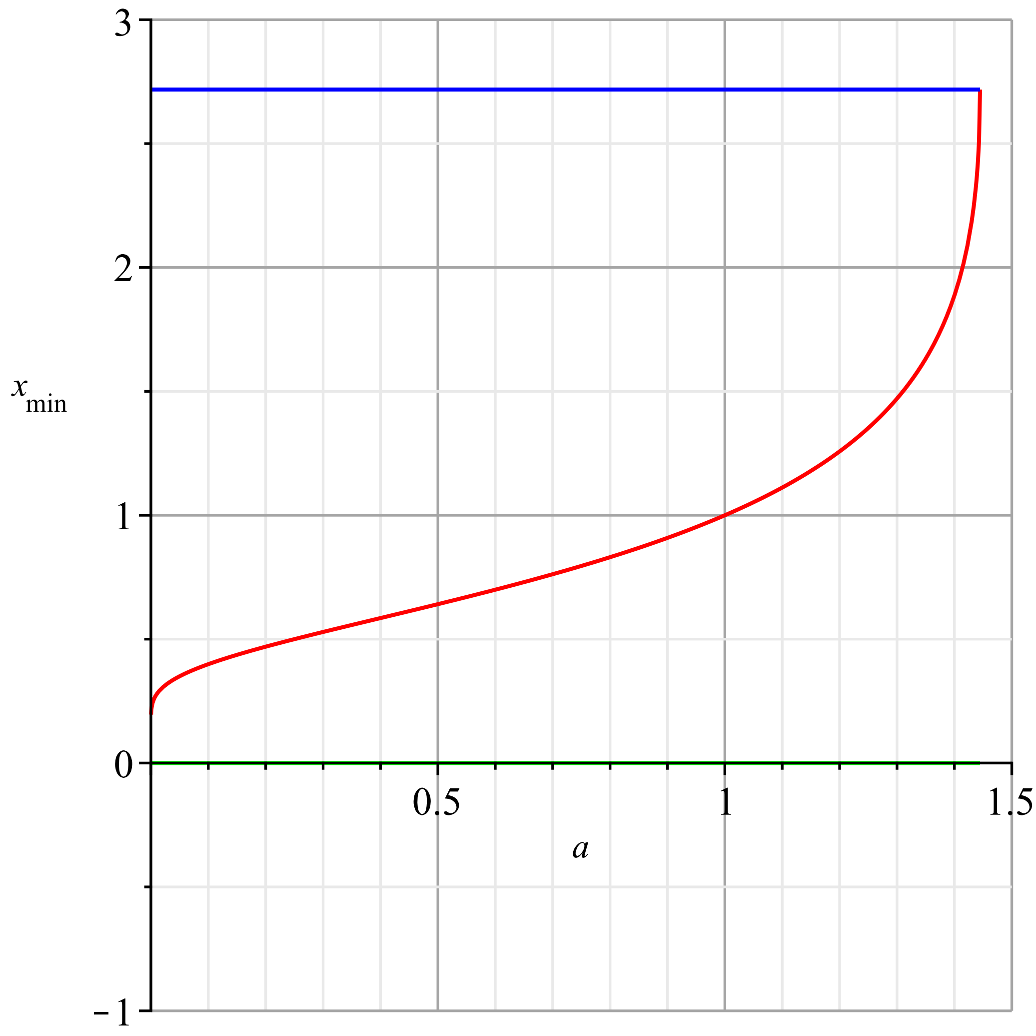
$$e \quad (17)$$

> $\lim_{a \to 1+} x_{max}$

$$\infty \quad (18)$$

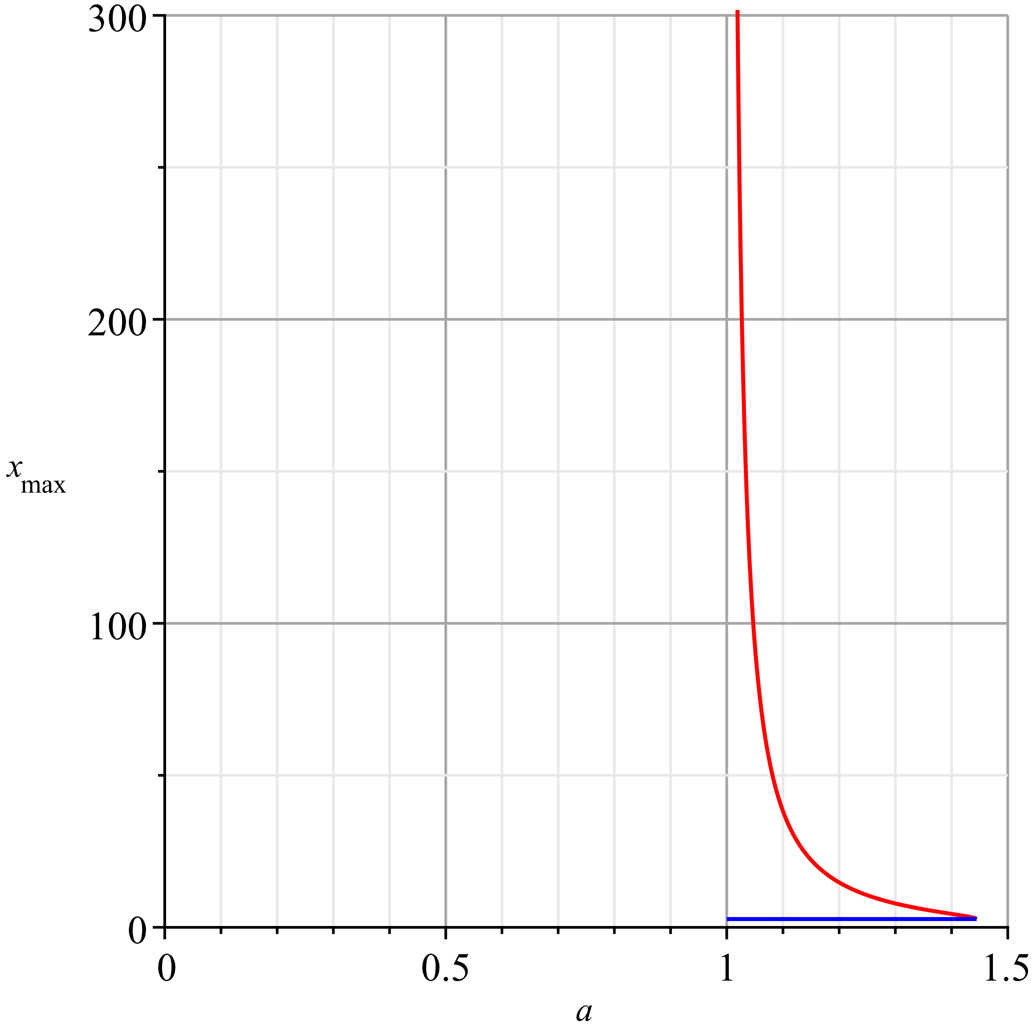
**Graf over $x_{min}$ :**

> $plot\left(\{x_{min}, e, 0\}, a = 0..e^{\frac{1}{e}}, view = [0..1.5, -1..3], gridlines, color = [green, red, blue], labels = [a, 'x_{min}']\right)$




Graf over $x_{max}$ :

> $plot\left(\{x_{max}, e\}, a = 1..e^{\frac{1}{e}}, y = 0..300, view = [0..1.5, 0..300], color = [red, blue], gridlines, labels = [a, 'x_{max}']\right)$




**Konklusion:**

For $0 < a \leq 1$ og for $a = e^{\frac{1}{e}}$ skærer grafen for $a^x$ og $x$ hinanden i **1 punkt**, nemlig

$$x = \frac{\text{LambertW}(-\ln(a))}{-\ln(a)}$$

For $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ skærer grafen for $a^x$ og $x$ hinanden i **2 punkter**, nemlig $x_{min} = \frac{\text{LambertW}(-\ln(a))}{-\ln(a)}$

og $x_{max} = \frac{\text{LambertW}(-1, -\ln(a))}{-\ln(a)}$

**Læs nærmere om LambertW funktionen:**

• I WikiPedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

• Implementeringen i Maple:
http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=LambertW&term=LambertW