Løsning af differentialligningen: "logistisk vækst med høst"

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H$$

Differentialligningen, som beskriver "logistisk vækst med høst", er af typen **Riccati**, her med konstante koefficienter.
Differentialligningen kan løses med håndkraft ved at indføre en ny variabel, så konstanten H på højre side udgår.
Derved bliver differentialligningen af **Bernoulli** typen. Denne differentialligning kan løses ved at indføre en ny variabel.
Derved bliver differentialligningen af **lineær** type, som kan løses ved integration.

Metode del 1 (omskrivning til Bernoulli type)

Indfører er ny variabel, så højresiden bliver uden konstanten H.

Ny variabel: $N(t) = U(t) + L$, hvor L er en konstant.

Hermed gælder, at $N'(t) = (U(t) + L)' = U'(t)$

$$\begin{aligned}
&Højre\,side = c\cdot\big(N(t)\cdot(K - N(t)) - H = \\
&c\cdot(U(t) + L)\cdot(K - (U(t) + L)) - H = \\
&c\cdot K\cdot U(t) + c\cdot K\cdot L - c\cdot(U(t)\cdot U(t)) - c\cdot U(t)\cdot L - c\cdot L\cdot U(t) - c\cdot L\cdot L - H = \\
&-c\cdot U(t)^2 + (c\cdot K - c\cdot L - c\cdot L)\cdot U(t) + \big(c\cdot K\cdot L - c\cdot L^2 - H\big) = \\
&\boldsymbol{-c\cdot U(t)^2 + (c\cdot K - 2\cdot c\cdot L)\cdot U(t) + (c\cdot K\cdot L - c\cdot L^2 - H)}
\end{aligned}$$

I konstantleddet $\boldsymbol{(c\cdot K\cdot L - c\cdot L^2 - H)}$ skal man vælge L, så konstantleddet er 0.

$$c\cdot K\cdot L - c\cdot L^2 - H = -c\cdot L^2 + c\cdot K\cdot L - H$$

Diskriminanten $\mathrm{D} = B^2 - 4\cdot A\cdot C = (c\cdot K)^2 - 4\cdot(-c)\cdot(-H) = c^2\cdot K^2 - 4\cdot c\cdot H$
Nulpunkt for L:

$$\frac{-B \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2\cdot A} = \frac{-(c\cdot K) \pm \sqrt{c^2\cdot K^2 - 4\cdot c\cdot H}}{2\cdot(-c)} = \frac{-c\cdot K}{-2\cdot c} \pm \sqrt{\frac{c^2\cdot K^2 - 4\cdot c\cdot H}{4\cdot c^2}} =$$

$$\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2\cdot K^2}{4\cdot c^2} - \frac{4\cdot c\,H}{4\cdot c^2}} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$$

Man vælger + foran kvadratroden, dvs. $L = \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$

Dvs. den nye variabel er: $\boldsymbol{N(t) = U(t) + \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}}$

Hermed bliver højresiden af differentialligningen (se ovenfor):
$HS = c\cdot(N(t)\cdot(K - N(t)) - H = -c\cdot U(t)^2 + (c\cdot K - 2\cdot c\cdot L)\cdot U(t) + (\boldsymbol{c\cdot K\cdot L - c\cdot L^2 - H}) = -c \cdot U(t)^2 + (c\cdot K - 2\cdot c\cdot L)\cdot U(t)$
Konstantleddet er væk.

Nu indsættes udtrykket for L:

$$HS = -c\cdot U(t)^2 + (c\cdot K - 2\cdot c\cdot L)\cdot U(t) = -c\cdot U(t)^2 + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot U(t)$$

Differentialligningen lyder nu: $U'(t) = -c\cdot U(t)^2 + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot U(t)$

Denne differentialligning i $U(t)$ er af typen **Bernoulli**, hvor eksponenten er 2. Kan derfor løses med metoden derfra!

Metode del 2 (omskrivning til lineær type)

Metoden til at løse **Bernoulli** type differentialigning er:
https://steen-toft.dk/mat/fiskeri/maple/bernouli.pdf

Man indfører en ny variabel: $V(t) = U(t)^{1-2} \Leftrightarrow V(t) = U(t)^{-1} \Leftrightarrow U(t) = V(t)^{-1}$
De 2 variable $U(t)$ og $V(t)$ er altså **reciprokke** funktioner.

Differentialligningen i $U(t)$ omskrives:

$$U'(t) = -c\cdot U(t)^2 + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot U(t) \Leftrightarrow$$

$$((V(t))^{-1})' = -c\cdot((V(t))^{-1})^2 + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot(V(t))^{-1} \Leftrightarrow$$

$$-1\cdot V(t)^{-2}\cdot V'(t) = -c\cdot V(t)^{-2} + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot(V(t))^{-1} \Leftrightarrow$$

$$-1\cdot V'(t) = -c + \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot V(t) \Leftrightarrow$$

$$V'(t) = c - \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot V(t)$$

Differentialligningen i $V(t)$ er en **lineær** type, endda med konstante koefficienter!

Metode del 3 (løsning af lineær type)

$$V'(t) = c - \left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot V(t)$$

Metoden til at løse den **lineære** type differentialigning er:
https://steen-toft.dk/mat/20172018/3g2/difflign/lineaer2.pdf
NB: notationen fra linket følges her.

Løsning kan findes ved **integration**.

$$a(t)=c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)$$

og

$$b(t)=c$$

Stamfunktionen findes:

$$A(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\mathrm{d}t=\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t$$

$$\mathrm{e}^{-A(t)}=\mathrm{e}^{-\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}$$

$$\mathrm{e}^{A(t)}=\mathrm{e}^{-\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}$$

$$\int b(t)\cdot\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t=\int c\cdot\mathrm{e}^{\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{c}{c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}\cdot\mathrm{e}^{\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}$$

Dvs.

$$\mathrm{e}^{-A(t)}\cdot\int b(t)\cdot\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t=$$

$$\mathrm{e}^{-\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}\cdot\frac{c}{c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}\cdot\mathrm{e}^{\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}=$$

$$\frac{c}{c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}=\frac{1}{K-2\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}$$

Så løsningen for $V(t)$ er:

$$V(t)=\mathrm{e}^{-A(t)}\cdot\int b(t)\cdot\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t+C_0\cdot\mathrm{e}^{-A(t)}=\frac{1}{K-2\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}+C_0\cdot\mathrm{e}^{-\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}$$

Metode del 4 (tilbage til $U(t)$)

Fra del 2 vides, at: $U(t) = V(t)^{-1}$.
Derfor bliver udtrykket for $U(t)$:

$$U(t) = \left(\frac{1}{K - 2\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)} + C_0\cdot \mathrm{e}^{-\left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t} \right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$U(t) = \frac{1}{\frac{1}{K - 2\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)} + C_0\cdot \mathrm{e}^{-\left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}}$$

Metode del 5 (tilbage til $N(t)$)

Fra del 1 vides, at: $N(t) = U(t) + \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$

Derfor bliver udtrykket for $N(t)$:

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{K - 2\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)} + C_0\cdot \mathrm{e}^{-\left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}} + \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$$

hvor $C_0 \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant.

Hermed er differentialligningen løst:

$$\boldsymbol{N(t) = \frac{1}{\frac{1}{K - 2\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)} + C_0\cdot \mathrm{e}^{-\left(c\cdot K - 2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}} + \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}}$$

hvor $C_0 \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant.

Test af løsning

Håndregnede løsning

restart

$c := \frac{2}{1000} : K := 400 : H := 50 :$

$$\boldsymbol{N(t) := \frac{1}{\frac{1}{K-2\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)}+C_0\cdot e^{-\left(c\cdot K-2\cdot c\cdot\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot t}}+\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}} :}$$

$$N(t) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{600}+C_0\,e^{\frac{\sqrt{6}\,t}{5}}}+200+50\sqrt{6}$$

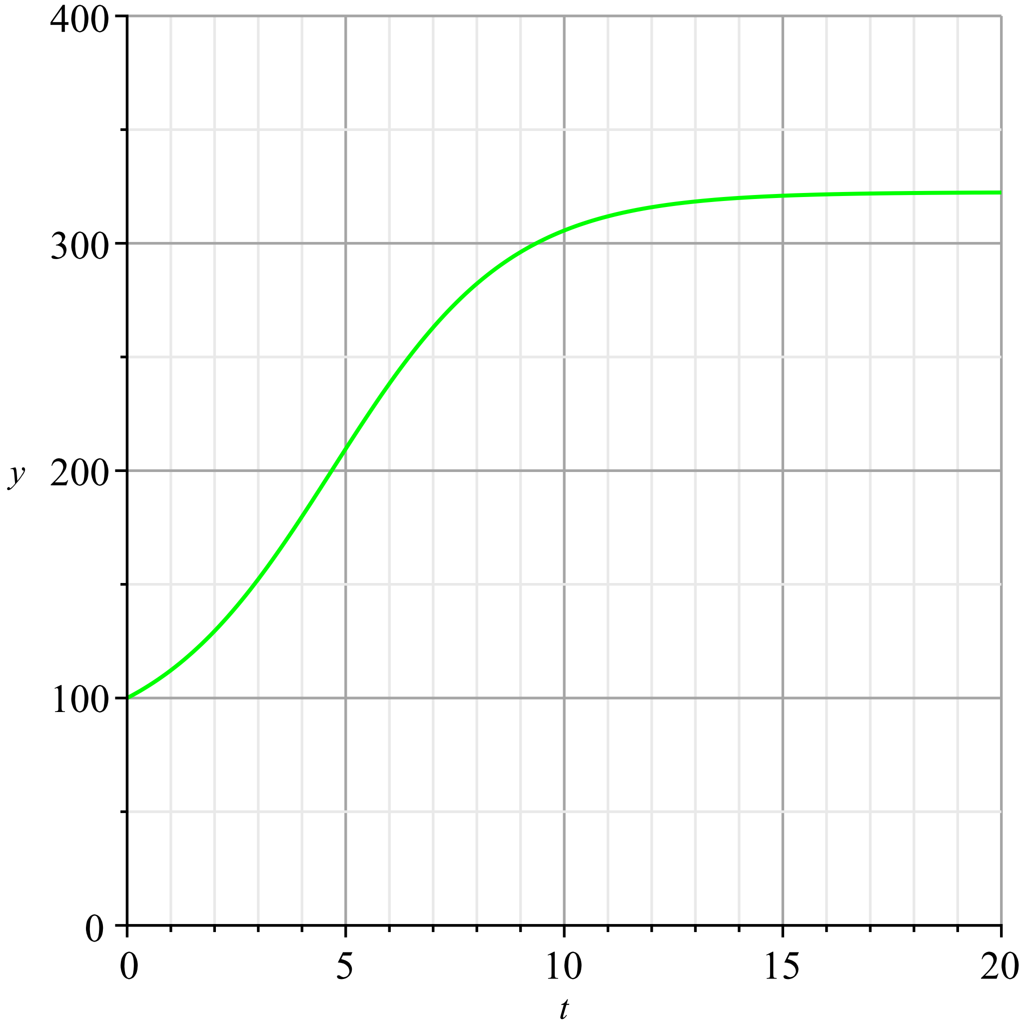
$$N(0) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{600}+C_0}+200+50\sqrt{6}$$

$$C_0 := solve(N(0)=100) = \frac{1}{300}\,\frac{-3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}$$

Dvs. løsningen er:

$$N(t) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{600}+\frac{\left(-3+\sqrt{6}\right)e^{\frac{\sqrt{6}\,t}{5}}}{300\left(\sqrt{6}+2\right)}}+200+50\sqrt{6}$$

plot$(N(t), t=0..20, y=0..400, gridlines, color=green)$



Maple løsning direkte

restart

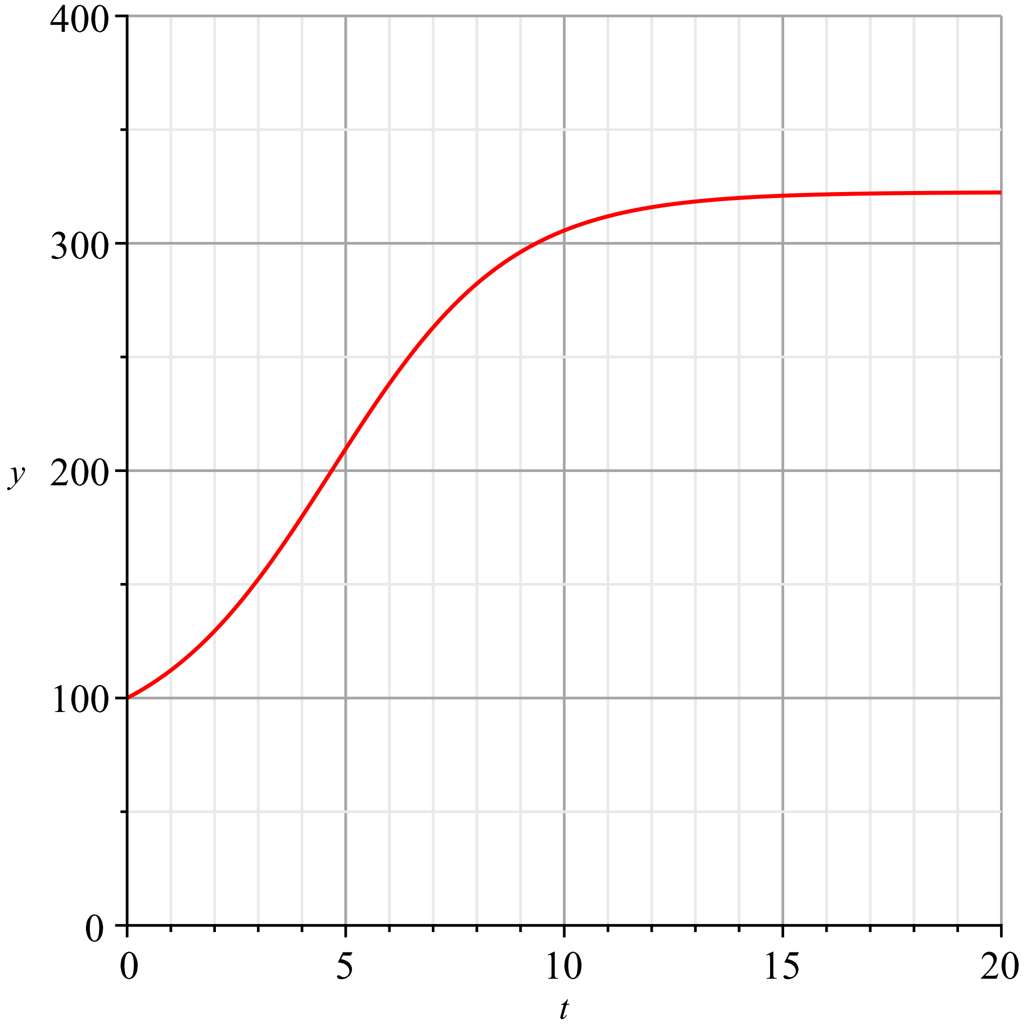
$c := \frac{2}{1000} : K := 400 : H := 50 :$

$dsolve(\{N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H, N(0) = 100\}, N(t)) :$
$N := unapply(rhs(\%), t) :$

Dvs. løsningen er:

$$N(t) = -\frac{50\left(-2\sqrt{6} + 3\tanh\left(\frac{\left(5\sqrt{6}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - 3t\right)\sqrt{6}}{30}\right)\right)\sqrt{6}}{3}$$

$plot(N(t), t = 0..20, y = 0..400, gridlines, color = red)$



Sammenligning af de 2 løsninger

Fra den **håndregnede løsning** har man dette udtryk for $N(t)$:

$$N_1(t) := \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{600} + \frac{\left(-3+\sqrt{6}\right) e^{\frac{\sqrt{6}\, t}{5}}}{300\left(\sqrt{6}+2\right)}} + 200 + 50\sqrt{6}:$$

Fra **Maple løsningen** har man dette udtryk for $N(t)$:

$$N_2(t) := -\frac{50\left(-2\sqrt{6} + 3\tanh\left(\frac{\left(5\sqrt{6}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - 3t\right)\sqrt{6}}{30}\right)\right)\sqrt{6}}{3}:$$

Er de identiske?

$solve\left(N_1(t) = N_2(t), t\right) = t$

Ja, de 2 funktionsudtryk er identisk for alle $t \in \mathbb{R}$!

Det er vist ikke lige til at bevise identiteten med håndregning!!!!!

Graferne ovenfor ser også helt ens ud!