Løsning af differentialligningen: "logistisk vækst med høst"

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H$$

Differentialligningen, som beskriver "logistisk vækst med høst", er af typen **separabel**,
idet højre siden er et 2. grads polynomium i $N(t)$ med konstante koefficienter.
Differentialligningen kan løses ved **faktorisering** af 2. grads polynomiet.
Brøken med 2. grads polynomiet i nævneren opdeles derefter i **partialbrøker**.
Hermed kan **stamfunktionerne** beregnes.
Ved **isolering** af $N(t)$ i udtrykket, fremkommer løsningen til differentialligningen.

Metode del 1 (separation af variable)

Differentialligningen er en **separabel** type.
Omskrives, så variable N og t **separeres**:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H \Leftrightarrow N'(t) = -c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H \Leftrightarrow$$
$$\frac{dN}{dt} = -c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H \Leftrightarrow \frac{1}{-c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H} \cdot dN = 1 \cdot dt \Leftrightarrow$$
$$\int \frac{1}{-c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H} \, \mathrm{d}N = \int 1 \, \mathrm{d}t \Leftrightarrow \int \frac{1}{-c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H} \, \mathrm{d}N = t + C_0$$

hvor C_0 er en integrationskonstant.

Metode del 2 (faktorisering af nævner)

Nævneren $-c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H$ skal **faktoriseres**:

$$-c \cdot (N(t))^2 + c \cdot K \cdot N(t) - H = 0$$

Diskriminant:
$$\mathrm{D} = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = (c \cdot K)^2 - 4 \cdot (-c) \cdot (-H) = c^2 \cdot K^2 - 4 \cdot c \cdot H$$

Rødder:

$$\frac{-B \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2 \cdot A} = \frac{-c \cdot K \pm \sqrt{c^2 \cdot K^2 - 4 \cdot c \cdot H}}{2 \cdot (-c)} = \frac{-c \cdot K}{2 \cdot (-c)} \pm \frac{\sqrt{c^2 \cdot K^2 - 4 \cdot c \cdot H}}{2 \cdot (-c)} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 \cdot K^2 - 4 \cdot c \cdot H}{4 \cdot c^2}} =$$
$$\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 \cdot K^2}{4 \cdot c^2} - \frac{4 \cdot c \cdot H}{4 \cdot c^2}} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{H}{c}} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$$

Dvs. nævneren kan **faktoriseres** som:

$$-c\cdot(N(t))^2+c\cdot K\cdot N(t)-H=-c\cdot\left(N(t)-\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot\left(N(t)-\left(\frac{K}{2}-\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)$$

For nemheds skyld definerer man de 2 rødder:

$a=\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}$ og $b=\frac{K}{2}-\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}$

Hermed får man:

$-c\cdot(N(t))^2+c\cdot K\cdot N(t)-H=-c\cdot(x-a)\cdot(x-b)$

Metode del 3 (opdeling i partialbrøker)

Brøken i integralet er nu omskrevet til:

$$\frac{1}{-c\cdot\left(N(t)-\left(\frac{K}{2}+\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)\cdot\left(N(t)-\left(\frac{K}{2}-\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{H}{c}}\right)\right)}=\frac{1}{-c\cdot(x-a)\cdot(x-b)}$$

Nævneren er et 2. grads polynomium i $N(t)$.

Gemmer lige faktoren $-c$ fra nævneren, dvs. ser kun på $\frac{1}{(x-a)\cdot(x-b)}$

Denne brøk opdeles nu i 2 såkaldte **partialbrøker**:
https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_fraction_decomposition#Example_1

Brøken ønskes skrevet som sum af 2 brøker, hvos konstanterne A og B skal bestemmes:

$\frac{1}{(x-a)\cdot(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \Leftrightarrow$
$1=(x-a)\cdot(x-b)\cdot\frac{A}{x-a}+(x-a)\cdot(x-b)\cdot\frac{B}{x-b} \Leftrightarrow$
$1=(x-b)\cdot A+(x-a)\cdot B \Leftrightarrow$
$1=A\cdot x-A\cdot b+B\cdot x-B\cdot a \Leftrightarrow$
$1=(A+B)\cdot x+(-A\cdot b-B\cdot a)$

Udtrykket skal gælde for **alle** værdier af x. Derfor skal disse 2 ligninger være opfyldt:
$A+B=0 \wedge -A\cdot b-B\cdot a=1 \Leftrightarrow$
$B=-A \wedge -A\cdot b-(-A)\cdot a=1 \Leftrightarrow$
$B=-A \wedge A\cdot(-b+a)=1 \Leftrightarrow$
$B=-A \wedge A=\frac{1}{a-b} \Leftrightarrow$
$A=\frac{1}{a-b} \wedge B=\frac{1}{b-a}$

Hermed er de 2 tællere fundet, dvs:

$$\frac{1}{(x-a)\cdot(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{\frac{1}{a-b}}{x-a} + \frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}$$

Så skal $-c$ fra nævneren lige huskes!

$$\frac{1}{-c\cdot(x-a)\cdot(x-b)} = \frac{1}{-c}\cdot\left(\frac{\frac{1}{a-b}}{x-a} + \frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}\right) = \frac{1}{-c\cdot(a-b)}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{1}{-c\cdot(b-a)}\cdot\frac{1}{x-b}$$

Metode del 4 (stamfunktioner)

Nu kan **stamfunktionen** beregnes.

Husk, at $a = \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$ og $b = \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}$

Begge rødder er postive, og $a > b$.

Vi regner kun i x-området mellem de 2 rødder, dvs. $b < x < a$.

Omskriver, så nævneren i de 2 integraler begge er positive i dette interval:

$$\int \frac{1}{-c\cdot(x-a)\cdot(x-b)}\,dx = \int\left(\frac{1}{-c\cdot(a-b)}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{1}{-c\cdot(b-a)}\cdot\frac{1}{x-b}\right)dx =$$

$$\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\int\frac{1}{a-x}\,dx + \frac{1}{-c\cdot(b-a)}\cdot\int\frac{1}{x-b}\,dx =$$

$$-\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln(a-x) + \frac{1}{-c\cdot(b-a)}\cdot\ln(x-b) = -\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln(a-x) + \frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln(x-b) =$$

$$\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot(\ln(x-b) - \ln(a-x)) = \frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln\left(\frac{x-b}{a-x}\right)$$

Differentialligningen fra del 1 har nu følgende udseende:

$$\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln\left(\frac{x-b}{a-x}\right) = t + C_0$$

hvor x er $N(t)$ og a og b er de 2 rødder.

Metode del 5 (isolering af variabel)

x skal nu isoleres i ligningen:

$$\frac{1}{c\cdot(a-b)}\cdot\ln\left(\frac{x-b}{a-x}\right) = t + C_0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x-b}{a-x}\right) = c\cdot(a-b)\cdot(t+C_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-b}{a-x} = e^{c\cdot(a-b)\cdot(t+C_0)}$$

Sætter $E = e^{c\cdot(a-b)\cdot(t+C_0)}$ for at simplificere videre løsning.

$$\frac{x-b}{a-x} = E \Leftrightarrow x-b = E\cdot(a-x) \Leftrightarrow x-b = a\cdot E - E\cdot x \Leftrightarrow$$

$$x + E\cdot x = a\cdot E + b \Leftrightarrow (E+1)\cdot x = a\cdot E + b \Leftrightarrow x = \frac{a\cdot E+b}{E+1}$$

Metode del 6 (indsætning af de rigtige variable)

Nu indsættes de rigtige symboler. Først E, derefter a og b :

$x = \frac{a \cdot E + b}{E + 1}$ bliver til

$$N(t) = \frac{a \cdot e^{c \cdot (a - b) \cdot (t + C_0)} + b}{e^{c \cdot (a - b) \cdot (t + C_0)} + 1} \Leftrightarrow$$

$$N(t) = \left(\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \cdot e^{c \cdot \left(\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) - \left(\frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \right) \cdot (t + C_0)} + \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \Bigg/ \left(e^{c \cdot \left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} - \left(\frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \right) \cdot (t + C_0)} + 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$N(t) = \frac{\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \cdot e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}}{e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + 1}$$

Hermed er differentialligningen løst:

$$\boldsymbol{N(t)} = \frac{\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \cdot e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}}{e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + 1}$$

hvor $C_0 \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant.

Test af løsning

Håndregnede løsning

restart

$c := \frac{2}{1000} : K := 400 : H := 50 :$

$$N(t) := \frac{\left(\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \right) \cdot e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}}}{e^{2 \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{H}{c}} \cdot (t + C_0)} + 1} :$$

$$N(t) = \frac{\left(200 + 50\sqrt{6}\right) e^{\frac{\sqrt{6}\,(t + C_0)}{5}} + 200 - 50\sqrt{6}}{e^{\frac{\sqrt{6}\,(t + C_0)}{5}} + 1}$$

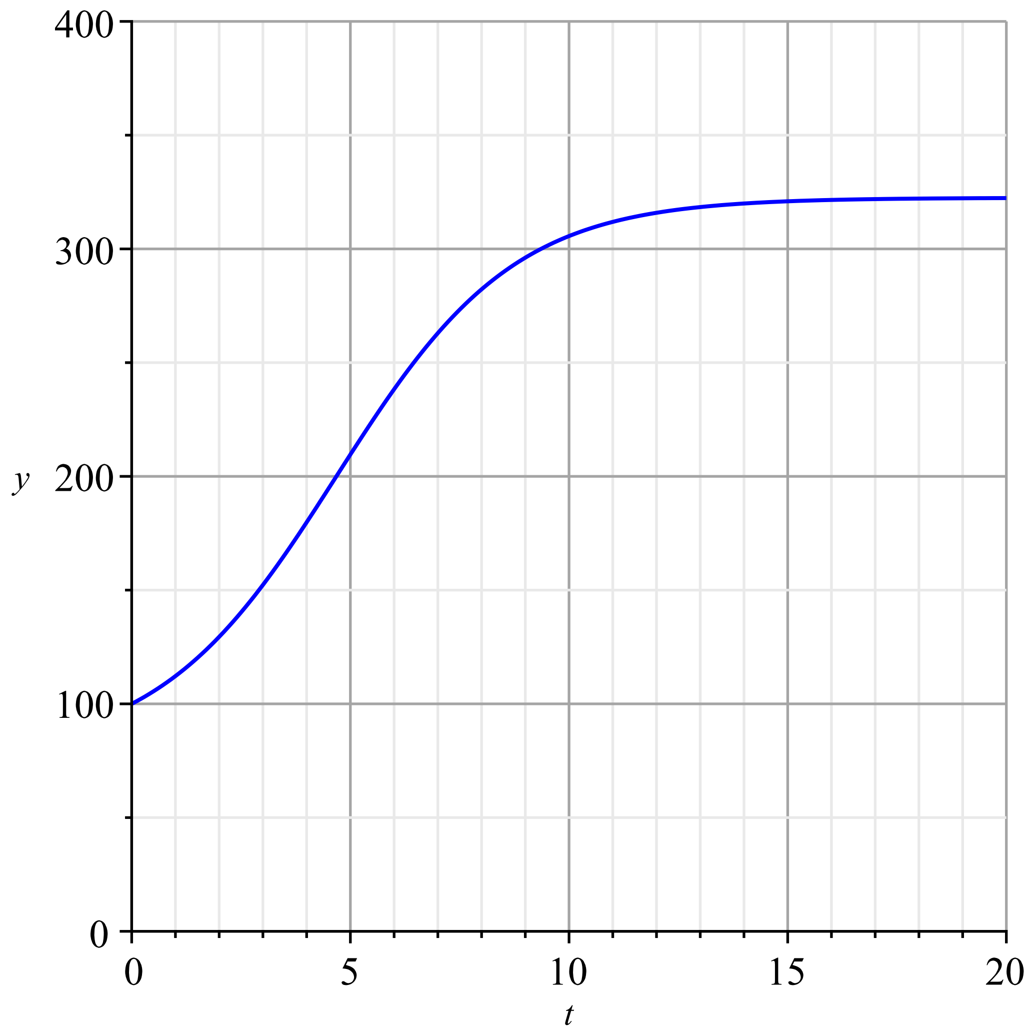
$$N(0) = \frac{\left(200 + 50\sqrt{6}\right) e^{\frac{\sqrt{6}\, C_0}{5}} + 200 - 50\sqrt{6}}{e^{\frac{\sqrt{6}\, C_0}{5}} + 1}$$

$$C_0 := solve(N(0) = 100) = \frac{5}{6} \ln\left(\frac{-2 + \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2}\right) \sqrt{6}$$

Dvs. løsningen er:

$$N(t) = \frac{\left(200 + 50\sqrt{6}\right) e^{\frac{\sqrt{6}\left(t + \frac{5\ln\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\right)\sqrt{6}}{6}\right)}{5}} + 200 - 50\sqrt{6}}{e^{\frac{\sqrt{6}\left(t + \frac{5\ln\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\right)\sqrt{6}}{6}\right)}{5}} + 1}$$

$plot(N(t), t = 0..20, y = 0..400, gridlines, color = blue)$



Maple løsning direkte

restart

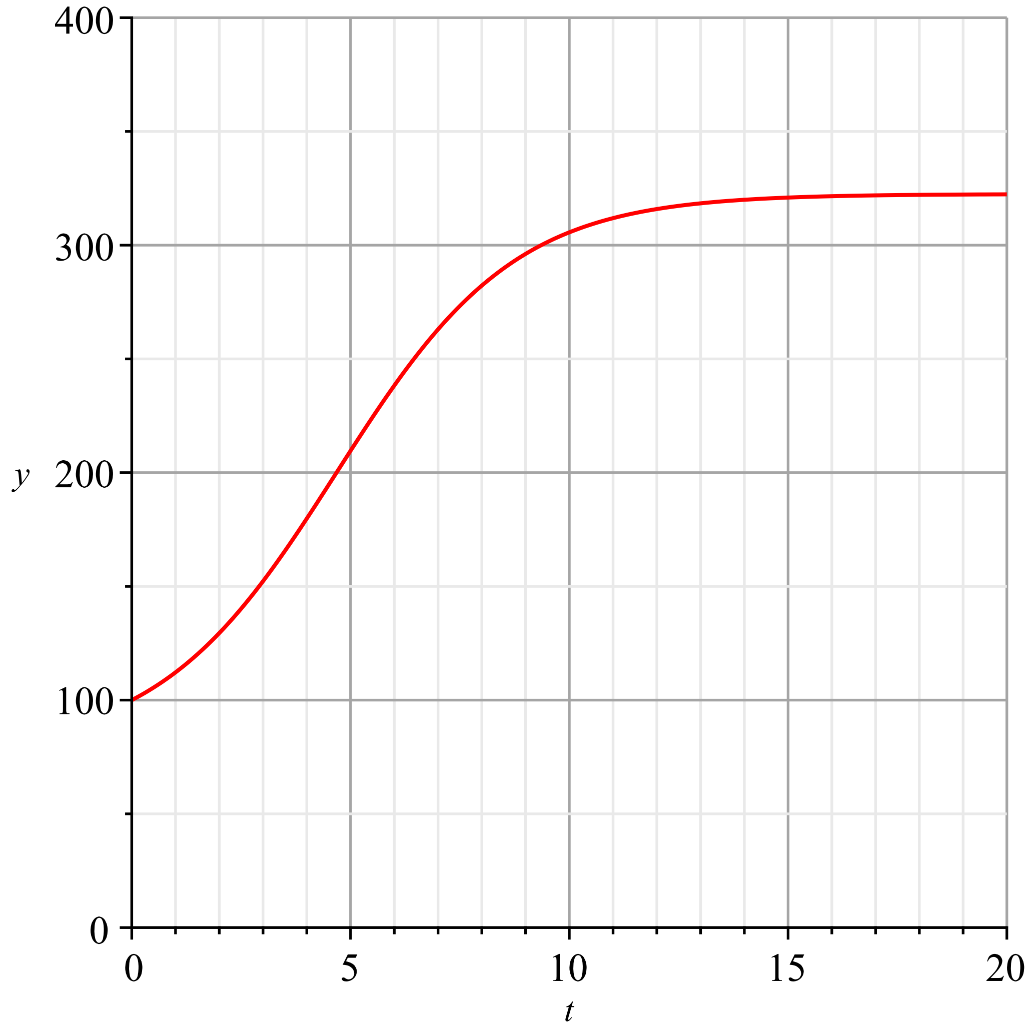
$c := \frac{2}{1000} : K := 400 : H := 50 :$

$dsolve(\{N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H, N(0) = 100\}, N(t)) :$
$N := unapply(rhs(\%), t) :$

Dvs. løsningen er:

$$N(t) = -\frac{50\left(-2\sqrt{6} + 3\tanh\left(\frac{\left(5\sqrt{6}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - 3t\right)\sqrt{6}}{30}\right)\right)\sqrt{6}}{3}$$

$plot(N(t), t = 0..20, y = 0..400, gridlines, color = red)$



Sammenligning af de 2 løsninger

Fra den **håndregnede løsning** har man dette udtryk for $N(t)$:

$$N_1(t) := \frac{\left(200 + 50\sqrt{6}\right) e^{\frac{\sqrt{6}\left(t + \frac{5\ln\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\right)\sqrt{6}}{6}\right)}{5}} + 200 - 50\sqrt{6}}{e^{\frac{\sqrt{6}\left(t + \frac{5\ln\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\right)\sqrt{6}}{6}\right)}{5}} + 1} :$$

Fra **Maple løsningen** har man dette udtryk for $N(t)$:

$$N_2(t) := -\frac{50\left(-2\sqrt{6}+3\tanh\left(\frac{\left(5\sqrt{6}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)-3\,t\right)\sqrt{6}}{30}\right)\right)\sqrt{6}}{3}:$$

Er de identiske?

$solve\left(N_1(t)=N_2(t),\,t\right) = t$

Ja, de 2 funktionsudtryk er identisk for alle $t \in \mathbb{R}$!

Det er vist ikke lige til at bevise identiteten med håndregning!!!!!

Graferne ovenfor ser også helt ens ud!