Projekt: Logistisk vækst med/uden høst

I dette projekt skal vi arbejde med differentialligninger, specielt med logistisk vækst og med en udvidelse, hvor der indgår høst.

Den *eksponentielle vækst* (type: $y' = k \cdot y$) vokser eksponentielt uden grænser. Det er en for primitiv beskrivelse af virkeligheden.

Den *logistiske vækst* ($y' = y \cdot (b - a \cdot y)$) lægger en dæmper på væksten, så den samlede population stagnerer på et niveau kaldet *bærekapaciteten.*
Hvad sker der, hvis man tilføjer en *høst*? Det kan være, at man fanger en bestemt del fisk ud af hele populationen af fisk.
Problemstillingen er aktuel f.eks. i forbindelse med fastsættelse af fiskekvoter. Ideen er at begrænse fiskeriet, så fiskearten ikke uddør pga. overfiskning.

Inspiration til projektet:
http://www.math.ku.dk/~moller/e00/matbio/lektion9/lektion9.pdf (side 8-12)
Her anvendes notationen derfra.

Matematiske begreber:
- differentialligninger
- fasediagrammer
- linjeelementer
- 2. grads ligning (rødder og toppunkt)

Maple begreber:
- dsolve
- dfieldplot - fra *DEtools*-pakken
- display - fra *plots*-pakken
- seq
- LogistReg - fra *Gym*-pakken

GeoGebra:
- tegning af parabel

1. Logistisk vækst

Differentialligningen *logistisk vækst* lyder:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$$

hvor der indgår følgende størrelser:
- N er populationens størrelse
- t er tiden
- $c > 0$ er en konstant
- $K > 0$ er en konstant

Opg. 1.1

Opskriv den generelle løsning i hånden, idet I oversætter lærebogen notation til ovenstående.

Opg. 1.2

Bestem den generelle løsning med Maple.

Opg. 1.3

Vis, at den generelle løsning kan skrives som $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{N0} - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot K \cdot t}}$

hvor $N0$ er værdien af N til tiden 0, dvs. $N(0)$.

Givet følgende værdier:
- $c = 0.002$
- $K = 400$
- $N(0) = 50$

Opg. 1.4

Indtegn den specifikke løsning i Maple.

Opg. 1.5

Bestem den værdi, som populationen nærmer sig til på lang sigt.

Opg. 1.6

Bestem den værdi, hvor populationen vokser hurtigst.

Opg. 1.7

Tegn et plot med linjeelementerne for differentialligningen.

Opg. 1.8

Indtegn den specifikke løsning fra 1.4 i samme kordinatsystem som plottet fra 1.7.

$N(0)$ skal på skift antage værdierne 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350.

Opg. 1.9

Indtegn kurveskaren i samme koordinatsystem.

Opg. 1.10

Indtegn kurveskaren og linjeelementerne i samme koordinatsystem.

2. Fasediagram

I ovenstående opgaver er der afvendt et koordinatsystem, hvor der på 1. aksen er t og på 2. aksen er N.
Plottet viser, hvordan populationen udvikler sig med tiden.

I et *fasediagram* anvendes et koordinatsystem, hvor 1. aksen er N og 2. aksen er N'.

Man plotter differentialligningen i dette koordinatsystem, dvs. indtegner $N' = c \cdot N \cdot (K - N)$.
Ideen er, at man kan se, hvor N vokser og aftager med tiden!

Givet følgende værdier:
- $c = 0.002$
- $K = 400$

Opg. 2.1

Tegn fasediagrammet med ovenstående værdier af konstanterne.

Opg. 2.2

Argumenter ud fra fasediagrammet, hvor N er voksende og aftagende som funktion af t.

En konstant L kaldes en *ligevægt*, hvis der findes en konstant løsning $N(t) = L$.

Opg. 2.3

Bestem ligevægtene ud fra fasediagrammet.

Opg. 2.4

Undersøg med Maple om ligevægtene stemmer.

Fasediagrammet for logistisk vækst er en parabel med grenene nedad, og med 2 rødder.

Opg. 2.5

Angiv en generel formel for de 2 rødder, udtrykt ved konstanterne c og K.

Opg. 2.6

Angiv en generel formel for toppunktet på parablen, udtrykt ved konstanterne c og K.

2. koordinaten for toppunktet er netop den maksimale væksthastighed af populationen.

Opg. 2.7

Angiv en generel formel for den maksimale væksthastighed, udtrykt ved konstanterne c og K.

3. Logistisk regression

I praksis kan man have givet en stribe målepunkter, som man formoder følger en logistisk vækst.
Det kunne være antal bakterier i et bægerglas i laboratoriet.

Gym-pakken i Maple har i Maple 18 fået tilført en logistisk regression (*LogistReg*)- efter ønske fra Steen Toft Jørgensen.

Givet følgende data:
$L1$: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]
$L2$: [9.6, 18.6, 29.0, 47.2, 71.1, 119.1, 174.6, 257.3, 350.7, 441.0, 513.3, 559.7, 594.8, 629.4, 640.8, 651.1, 655.9, 659.6, 661.8]

Opg. 3.1

Lave en graf og bestemt forskriften ved logistisk regression.
Sørg for pæne enheder på akserne, og få origo med.

Opg. 3.2

Definer funktionen $f(x)$, som resultatet af den logistiske regression.
Beregn forventede funktionsværdier i 7.5 og 25.

4. Logistisk vækst med høst

Differentialligningen for *logistisk vækst med høst* lyder:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) - H$$

hvor der indgår følgende størrelser:
- N er populationens størrelse
- t er tiden
- $c > 0$ er en konstant
- $K > 0$ er en konstant
- $H > 0$ er en konstant, kaldet *høsten*

Meningen er, at man modellerer en logistisk vækst, hvor man hele tiden høster fra populationen.
Det kunne være, at man fisker et konstant antal kg fisk hver time (H hvis t er i timer).

Fasediagrammet gælder nu ligningen: $N' = c \cdot N \cdot (K - N) - H$

Opg. 4.1

Beregn en generel formel for rødderne, udtrykt ved konstanterne c, K og H.

Opg. 4.2

Bestem en generel formel for toppunktet på parablen, udtrykt ved konstanterne c, K og H.

Opg. 4.3

Den maksimale høst bestemmes hvor toppunktet ligger på 1. aksen.
Kaldes *MSY*, dvs. 'maximal susstainable yield".
Bestem *MSY* udtrykt ved konstanterne c og K.

Opg. 4.4

Undersøg om *MSY* er en stabil ligevægt.

Opg. 4.5

Bestem den generelle løsning med Maple.
Undersøg på den engelske Wikipedia, hvad "tanh" er for en funktion.
Tegn grafen for "tanh".

Givet følgende værdier:

- $c = 0.002$
- $K = 400$
- $H = 50$
- $N(0) = 100$

Opg. 4.6

Bestem den specifikke løsning med Maple.

Opg. 4.7

Indtegn løsningen.

Opg. 4.8

Bestem grænseværdien af populationen, når $t \to \infty$. Brug Maple!

Opg. 4.9

Beregn værdien af den største rod fra opg. 4.1, når man anvender de givne værdier af c, K og H.
Sammenlign med svaret fra opg. 4.8, og sammenlign med svaret fra opg. 1.5.