Løsning af en svær ligning med "solve", "fsolve" og "intervalsolve"

Trigonometrisk ligning

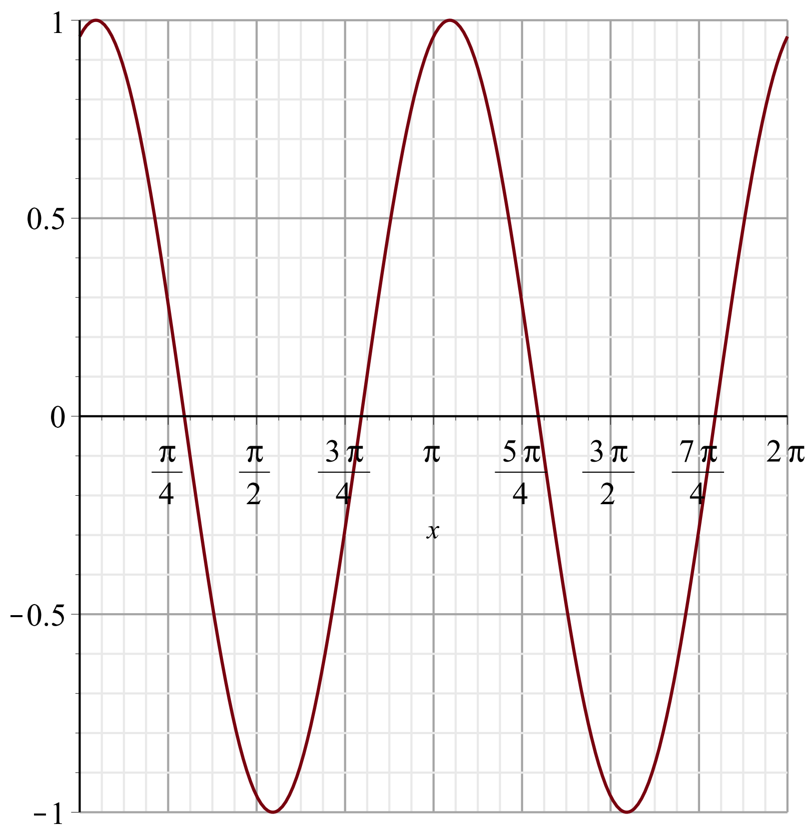
> *restart*

> $f := x \rightarrow \sin(2 \cdot x - 5)$

$$f := x \rightarrow \sin(2\,x - 5) \tag{1.1}$$

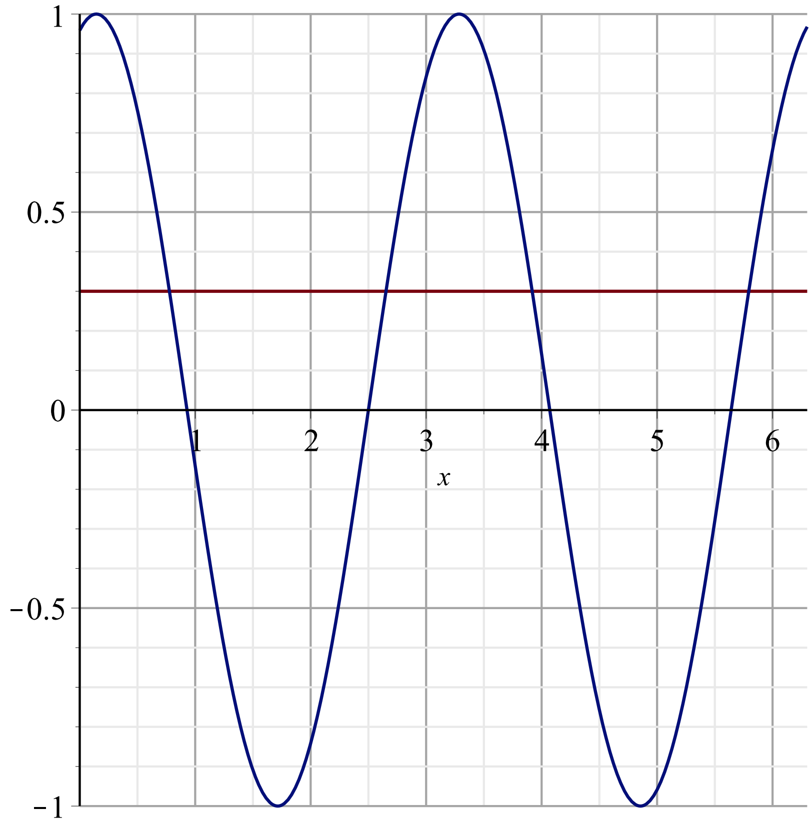
Løs ligningen: $\sin(2 \cdot x - 5) = 0.3$ for $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

> $plot(f(x), x = 0..2 \cdot \pi, gridlines)$



Tegn grafen til illustration af problemet. Begge sider af ligningen tegnes.
Man skal så finde skæringspunkterne:

> $plot(\{0.3, f(x)\}, x = 0..6.3, gridlines)$



Maple finder umiddelbart kun én løsning:

> $solve(f(x) = 0.3, x)$

$$2.652346327 \quad (1.2)$$

> $solve(\{f(x) = 0.3, x \geq 0, x \leq 2 \cdot \pi\}, x)$

$$\{x = 2.652346327\} \quad (1.3)$$

Kik på graferne, og se at der er 4 løsninger.
<u>Løs i hvert interval</u>, hvor man er sikker på, at der er en løsning.
Brug den numeriske løser <u>"fsolve"</u>:

> $fsolve(f(x) = 0.3, x = 0..2)$

$$0.7768573462 \quad (1.4)$$

> $fsolve(f(x) = 0.3, x = 2..3)$

$$2.652346327 \quad (1.5)$$

> $fsolve(f(x) = 0.3, x = 3..5)$

$$3.918450000 \quad (1.6)$$

> $fsolve(f(x) = 0.3, x = 5..6)$

$$5.793938981 \quad (1.7)$$

Hvis man skal have Maple til at løse ligningen med "solve", så skal man have sat nogle parametre på.
"AllSolutions" giver alle løsninger:

> $solve(\{f(x) = 0.3, x \geq 0, x \leq 2\cdot\pi\}, x, AllSolutions)$

$$\{x = 2.652346327 + 1.266103673\ \_B1{\sim} + 3.141592654\ \_Z1{\sim}\} \quad \textbf{(1.8)}$$

I svaret står der $\_B1{\sim}$ som betyder et binært tal, dvs. 0 eller 1. $\_Z1{\sim}$ betyder et helt tal, dvs. ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
Herved får man 4 løsninger indenfor intervallet $[0; 2\cdot\pi]$.

Tilføjer man "Explicit", så skriver løsningerne DIREKTE:

> $solve(\{f(x) = 0.3, x \geq 0, x \leq 2\cdot\pi\}, x, AllSolutions, Explicit)$

$$\{x = 2.652346327\}, \{x = 5.793938981\}, \{x = 0.776857346\}, \{x = 3.918450000\} \quad \textbf{(1.9)}$$

I Gym-pakken til Maple 18 er der kommet en interessant ny mulighed "intervalsolve":

> $with(Gym):$

> $intervalsolve(f(x) = 0.3, x = 0..2\cdot\pi)$

$$[0.7768573462, 2.652346327, 3.918450000, 5.793938981] \quad \textbf{(1.10)}$$

Eksamensopgave B-niveau

I en matematisk model kan østrogenkoncentrationen efter indtagelse af en p-pille beskrives ved

$$C(t) = 67\cdot(e^{-0{,}041\cdot t} - e^{-3{,}1\cdot t}), \quad 0 \leq t \leq 36\,,$$

hvor $C(t)$ er østrogenkoncentrationen i blodet (målt i picogram pr. milliliter) til tidspunktet t (målt i timer) efter indtagelse af en p-pille.

a) Tegn grafen for C, og bestem østrogenkoncentrationen i blodet efter 20 timer.

b) Bestem, hvor lang tid der går, fra man har indtaget en p-pille, til østrogenkoncentrationen er maksimal.

For at undgå at blive gravid skal der tages en ny p-pille, når østrogenkoncentrationen falder til en værdi under 25 picogram pr. milliliter.

c) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, inden der skal tages en ny p-pille.

Kilde: Investigating birth control: comparing oestrogen levels in patients using the Ortho Evra patch versus the Ortho-Cyclen pill, Theresa A. Laurent, TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, Volume 27, No. 2, 2008.

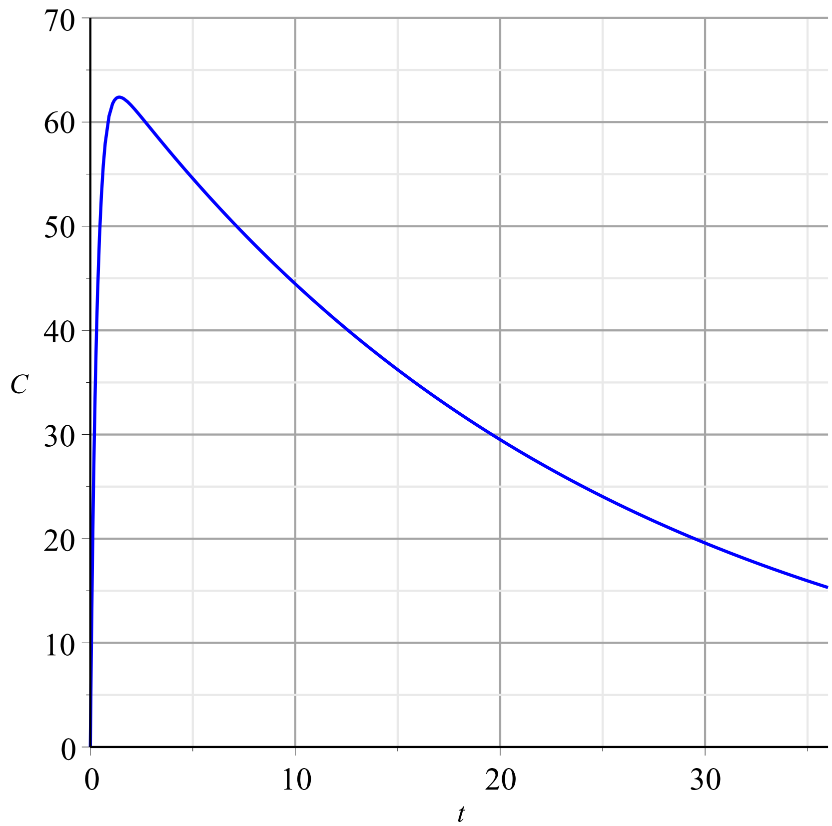
> $restart$

a)

> $C := t \rightarrow 67 \cdot \left(e^{-0.041 \cdot t} - e^{-3.1 \cdot t}\right)$

$$C := t \rightarrow 67\, e^{(-1) \cdot 0.041\, t} - 67\, e^{(-1) \cdot 3.1\, t} \tag{2.1.1}$$

> $plot(C(t), t = 0..36, C = 0..70, gridlines, color = blue)$



> $C(20)$

$$29.50892085 \tag{2.1.2}$$

Konklusion: efter 20 timer er østrogen-koncentrationen ca. $\underline{\underline{29.5\ \frac{pg}{mL}}}$

b)

Bestemmer hvornår der er vandret tangent:

> $solve(\{C'(t) = 0, t > 0, t < 36\}, t)$

$$\{t = 1.414052084\} \tag{2.2.1}$$

Og hvornår funktionen vokser og aftager:

> $solve(\{C'(t) > 0, t > 0, t < 36\}, t)$

$$\{0. < t, t < 1.414052084\} \tag{2.2.2}$$

> $solve(\{C'(t) < 0, t > 0, t < 36\}, t)$

$$\{1.414052084 < t, t < 36.\} \tag{2.2.3}$$

alternativ:

> *maximize*$(C(t), t = 0..36, location)$

$$62.38983975, \{[\{t = 1.414052084\}, 62.38983975]\} \quad \textbf{(2.2.4)}$$

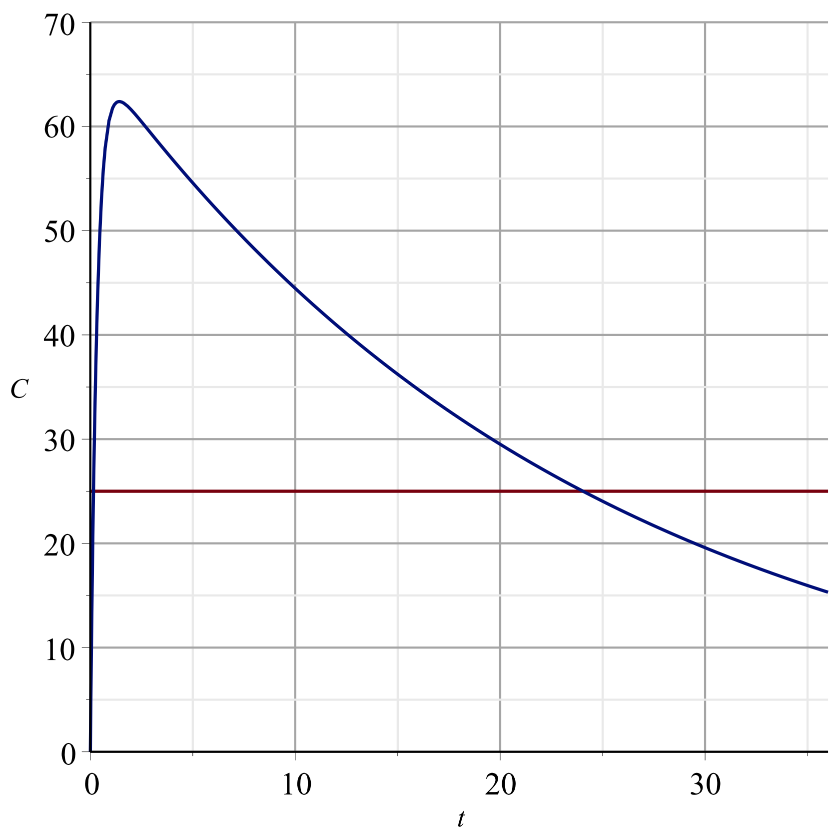
Konklusion: der går ca. 1.4 *timer* fra man indtager p-pillen til østrogen-koncentrationen er maksimal

c)

Beregner hvornår koncentrationen er $25 \ \frac{pg}{mL}$.
På grafen kan man se, at løsningen ligger mellem 20 og 30 timer.

Her anvendes metoden, som står ovenfor:
a) tegne grafen
b) konstatere, at der er en løsning mellem 20 og 30
c) løse ligning med "fsolve" og et angivet interval, her 20..30
eller anvendes "intervalsolve" og et angivet interval, her 20..30

> *plot*$(\{25, C(t)\}, t = 0..36, C = 0..70, gridlines)$



> ***fsolve*$(C(t) = 25, t = 20..30)$**

(2.3.1)

$$24.04431206 \quad (2.3.1)$$

eller:

> $with(Gym):$

> $intervalsolve(C(t) = 25, t = 20..30)$

$$[24.04431206] \quad (2.3.2)$$

NB: "*solve(C(t)=25,t)*" bliv er aldrig færdig, heller ikke "*fsolve(C(t)=25,t)*"!!!!!!!
Prøv selv.

Konklusion: man skal tage en ny p-pille efter ca. $\underline{\underline{24.0\ timer}}$.

Det passer jo glimrende med at tage en pille om dagen!