2017-05-18 stx B, opgave 9

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - 8) \cdot e^{-x} .$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

b) Løs ligningen $f(x) = -6$.

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := (x^2 - 8) \cdot e^{-x}$:

a)

Metode 1

Bruger Maple direkte til at finde, hvor funktionen vokser og aftager.

$solve(f'(x) = 0, x) = 4, -2$

$solve(f'(x) \geq 0, x) = RealRange(-2, 4)$

$solve(f'(x) \leq 0, x) = RealRange(-\infty, -2), RealRange(4, \infty)$

Metode 2

Den traditionelle metode.

$solve(f'(x) = 0, x) = 4, -2$

$f'(-3) = -7\,e^3 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -140.60$

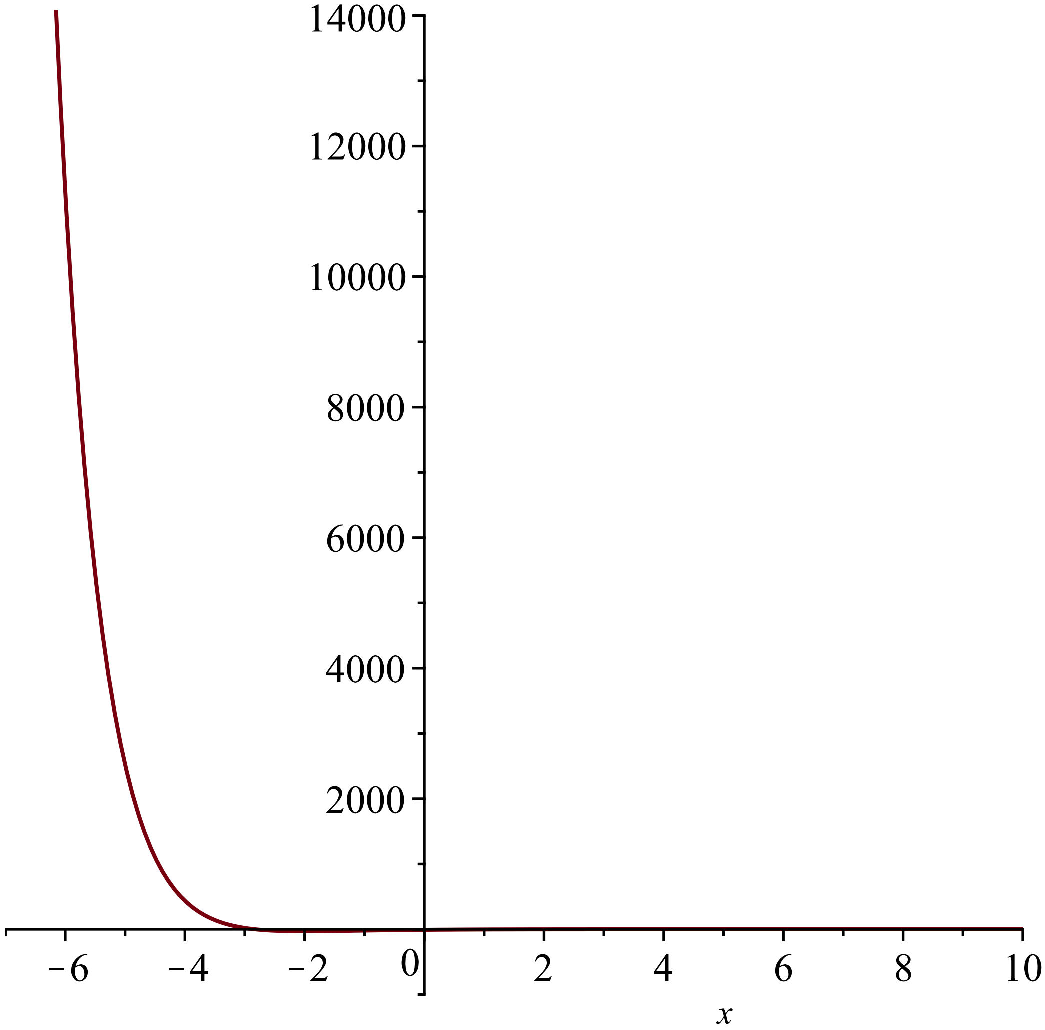
$f'(0) = 8$

$f'(5) = -7\,e^{-5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.047165$

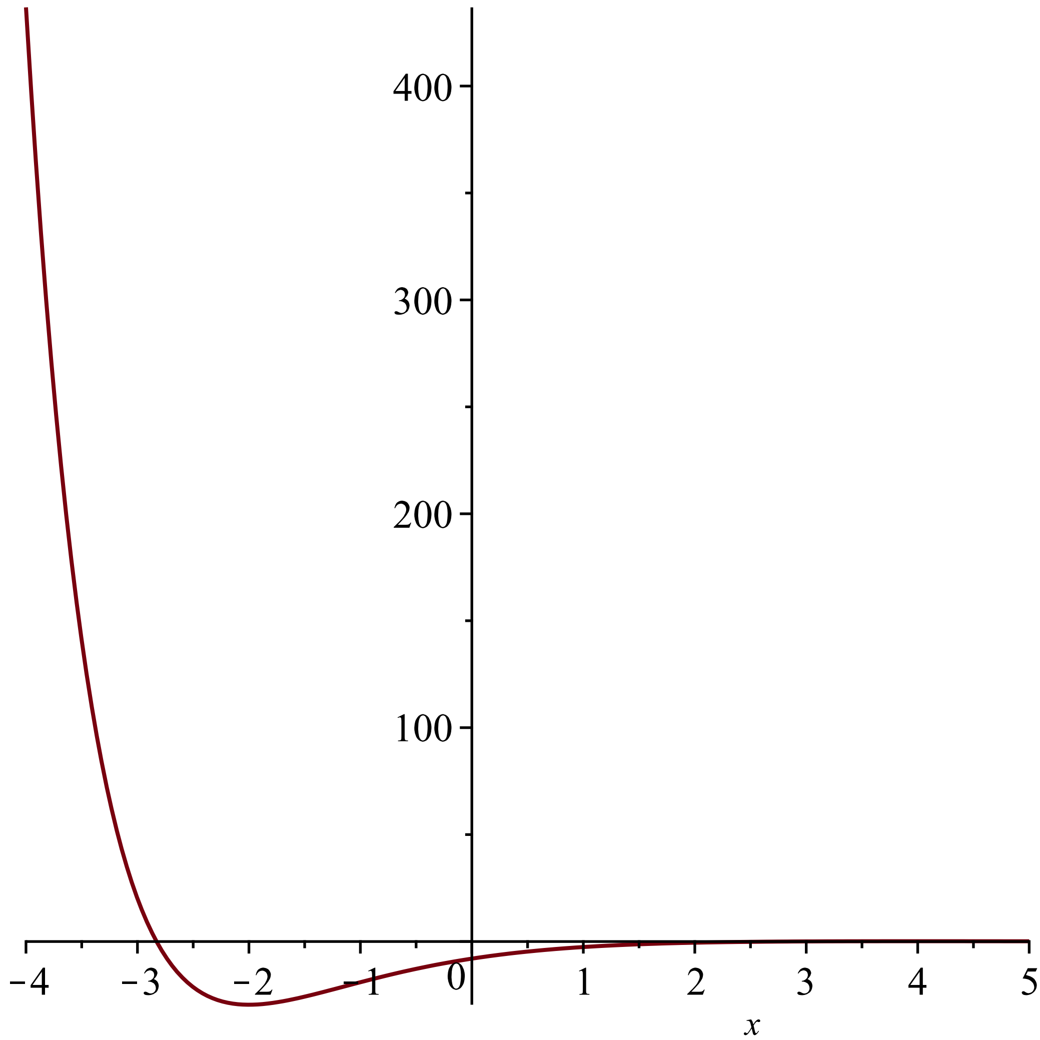
Konklusion mht. monotoniforhold:
f er aftagende i]-∞;-2]
f er voksende i [-2;4]
f er aftagende i [4;∞[

b)

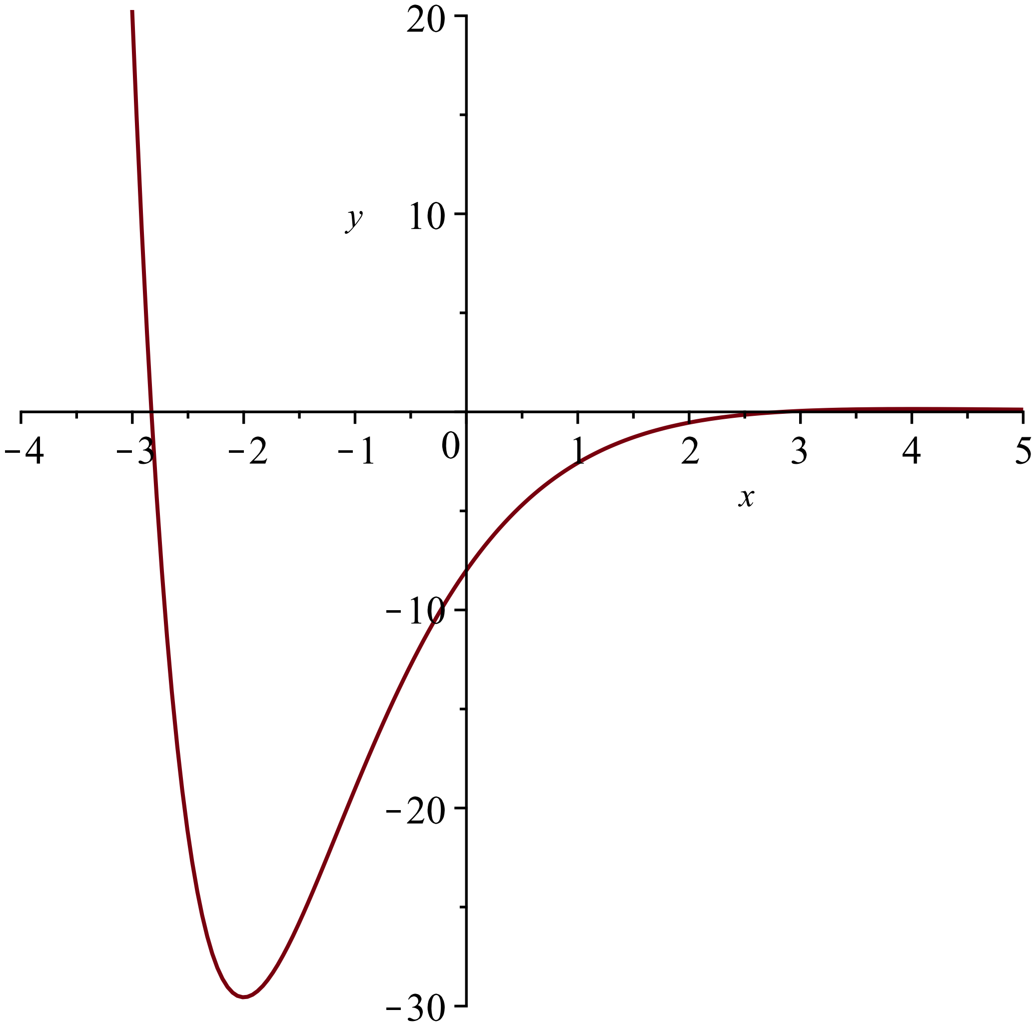
Tegner er graf for at få overblikket!
plot($f(x)$)



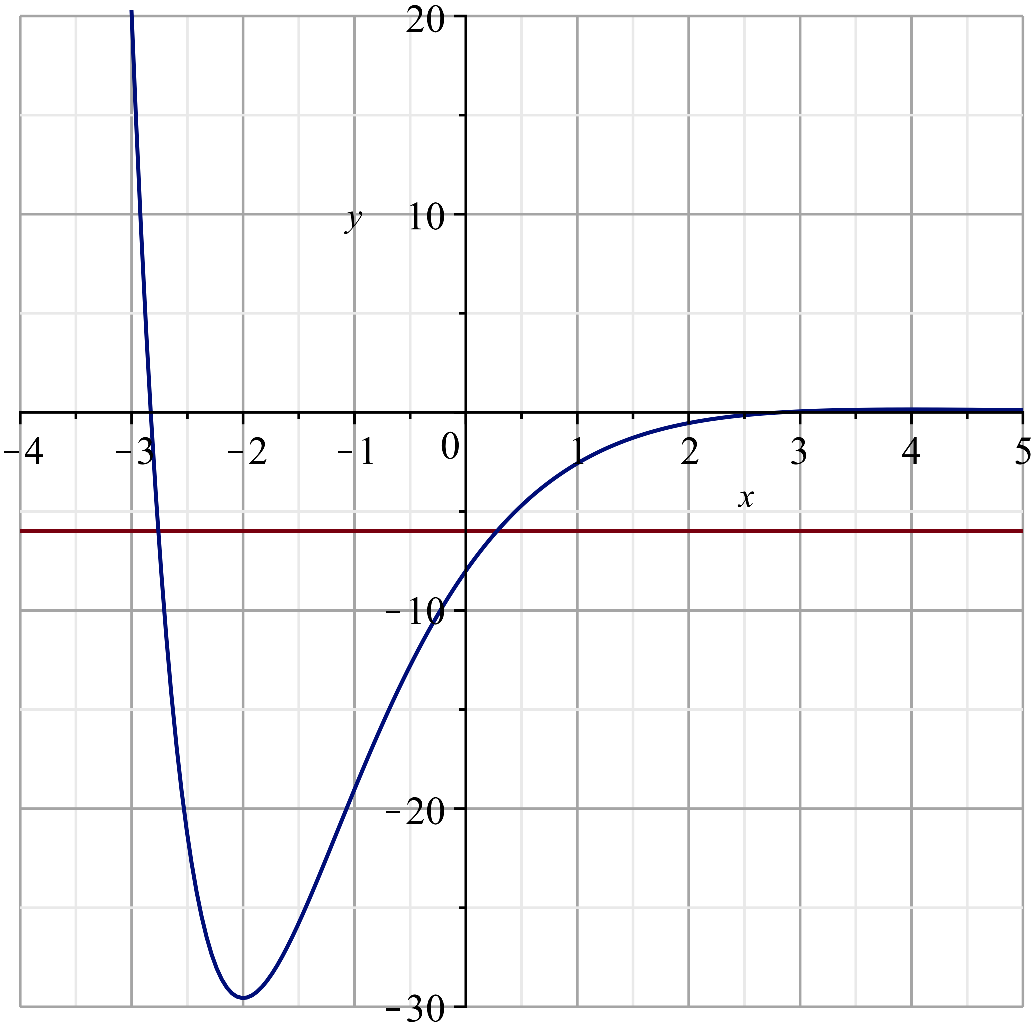
Må zoome ind for at se detaljerne:
$plot(f(x), x=-4..5)$



Må begrænse visningen på y-aksen, så detaljerne kan ses:
$plot(f(x), x = -4..5, y = -30..20)$



Plotter også konstanten -6 på grafen:
$plot(\{\ -6, f(x)\}, x=-4..5, y=-30..20, gridlines)$



NB: **monotoniforholdene** i spørgsmål a) fortæller, at grafen nu er fornuftig, idet funktionen aftager fra -∞ til -2, vokser fra -2 og til 4, aftager derefter.
Funktionen går imod 0, når $x \to \infty$: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Der vil således være præcis 2 skæringspunkter.

Det ser altså ud til, at ligningen $f(x) = -6$ har 2 løsninger!

Forsøg 1

Prøver med en almindelig "solve". Maple forsøger at løse ligningen eksakt:
$solve(f(x) = -6, x)$
Warning, solutions may have been lost

$$= RootOf\left(e^{-\_Z}\,\_Z^2 - 8\,e^{-\_Z} + 6\right) \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Laver tilnærmede værdier af løsningerne:
$solve(f(x) = -6, x) : evalf(\%)$
Warning, solutions may have been lost

$$= -2.760515359 \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Men det er jo kun én af de 2 løsninger!

Forsøg 2

Prøver at tvinge Maple til at løse ligningen tilnærmet. Sætter punktum efter -6:
$solve(f(x) = -6., x)$
Warning, solutions may have been lost

$$= 0.2779762722, -2.760515359 \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Af uransagelige grunde så dukker de 2 løsninger op nu.
Men advarslen gør, at man ikke føler sig sikker på, at alle løsninger faktisk er fundet.

Forsøg 3

Prøver med den numeriske løser:
$fsolve(f(x) = -6, x) = 0.2779762722$
For nu en anden løsning end i forsøg 1. Det er så nok den anden løsning?

Forsøg 4

Prøver med den numeriske løser:
$fsolve(f(x) = -6, x) = 0.2779762722$
Stadigvæk kun 1 løsning.

Forsøg 5

Prøver med den numeriske løser og indsnævrede intervaller:
$fsolve(f(x) = -6, x = -4..-2) = -2.760515359$
$fsolve(f(x) = -6, x = -1..2) = 0.2779762722$
Nu finder Maple de 2 løsninger hver for sig.

Forsøg 6

Prøver med "intervalsolve" fra Gym-pakken:
$intervalsolve(f(x) = -6, x = -10..10) = [\ ]$
Giver ingen løsning!!!

Forsøg 7

Prøver med "intervalsolve" fra Gym-pakken og punktum efter -6:
$intervalsolve(f(x) = -6., x = -10..10) = [-2.760515359, 0.2779762722]$
Så dukker de 2 løsninger op!

Forsøg 8

Prøver med "fintervalsolve" fra Gym-pakken:
$fintervalsolve(f(x) = -6, x = -10..10) = [-2.760515359, 0.2779762722]$
De 2 løsninger findes.

NB: Løsning af ligninger kan volde store problemer!
Tegn altid en graf, og se om grafen passer med antal løsninger, og om løsningerne er som forventet ud fra grafen.

Konklusion: ligningen $f(x) = -6$ har 2 løsninger, nemlig ca. $\underline{\underline{-2.76}}$ og ca. $\underline{\underline{0.28}}$