

MODELLERING AF REB, SPIRALER, ARMBÅND MAPLE-DAG DTU 2021



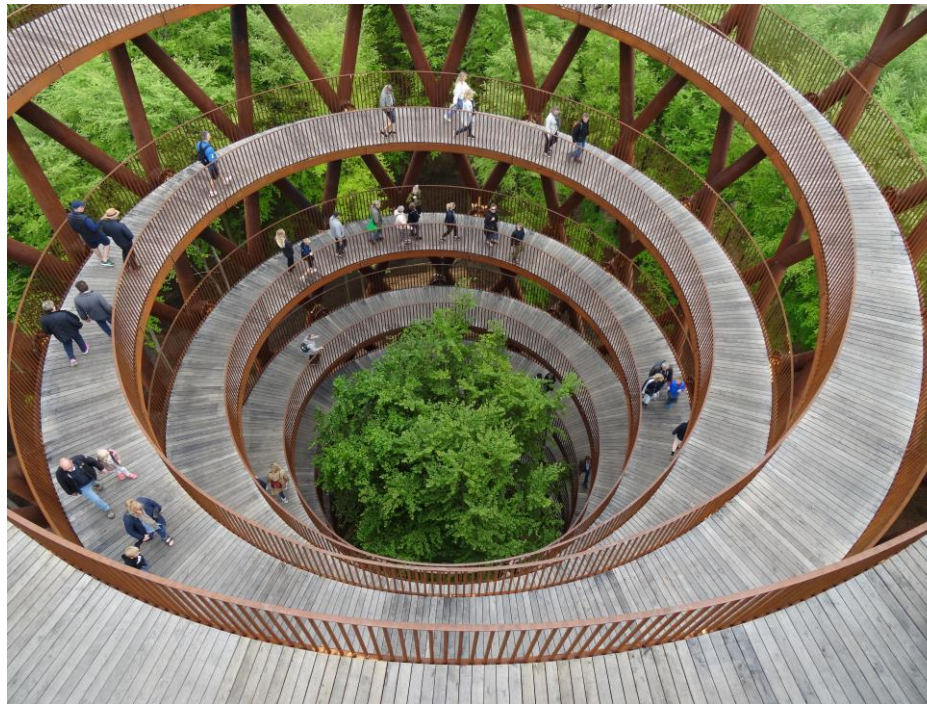
1

Steen Toft Jørgensen

(2009-) ekstern lektor, DTU Compute, Matematik 1

(1979-2018: pædagogisk faglig koordinator, Helsingør Gymnasium)

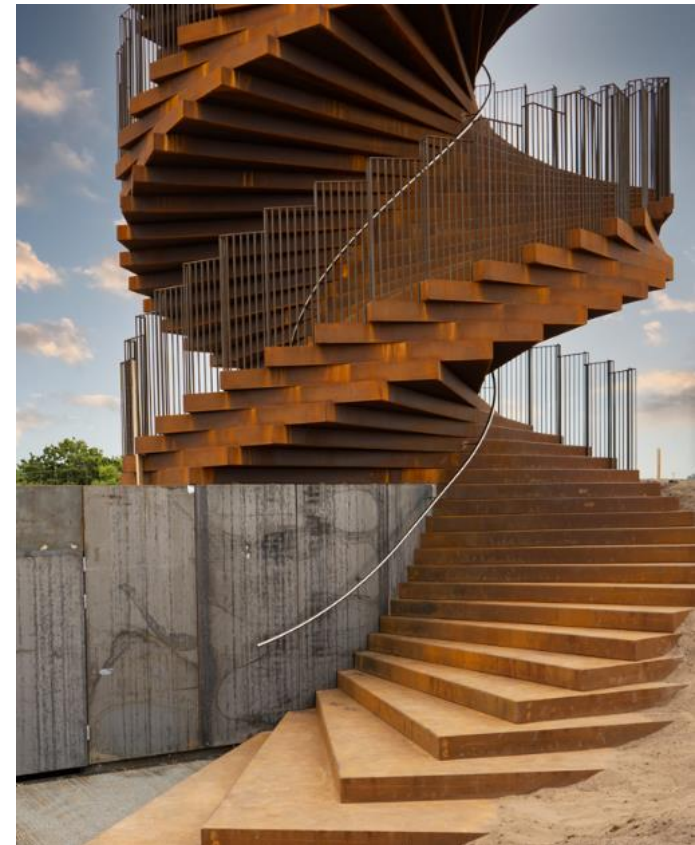
MAPLE-DAG DTU 2019 & 2020: SKOVTÅRNET PÅ SYDSJÆLLAND



Link: <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop.htm#seminar>

OBS - NYT TÅRN I DANMARK 2021: MARSKTÅRNET I SKÆRBÆK, SØNDERJYLLAND

- 25 m højt
- 6.2 m i diameter i bunden
- 12.7 m i diameter i toppen
- Materiale: corten stål
- Entrépris voksen: 90 DKK
- Stor succes!

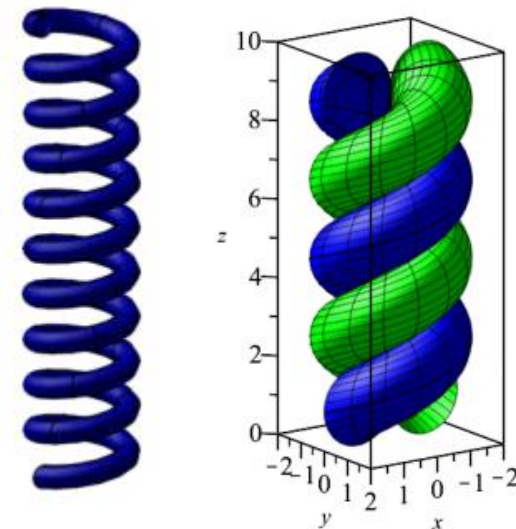


EMNER 2021

- **REB**
- **SPIRALER**
- **ARMBÅND**
- **MAPLE-PAKKER**

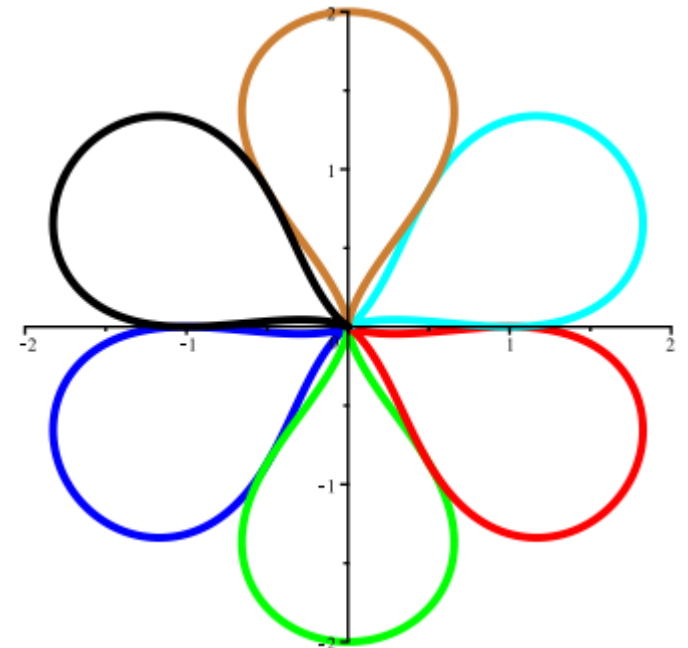
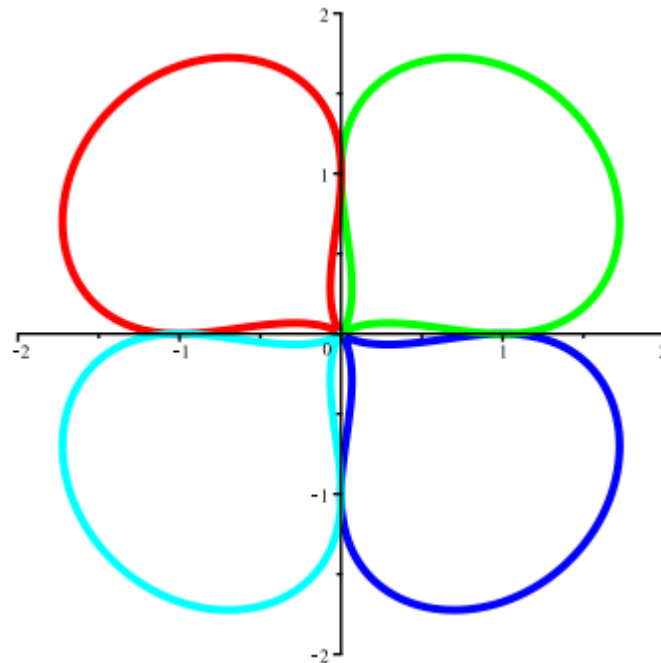
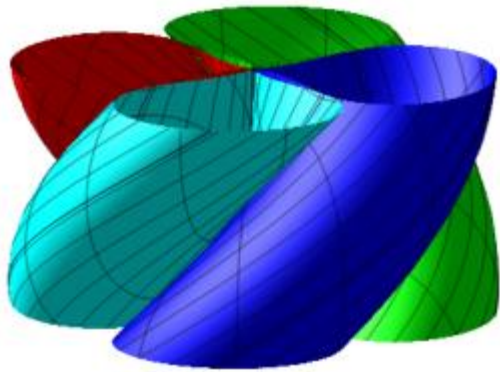
MODELLERING AF REB

- Fortsættelse af 3D-modellering
- ”**Reb**” er inspireret af 3 artikler fra Jakob Bohr (DTU) og Kasper Olsen (KU):
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00214-009-0639-4.pdf>
<https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/93/60004/pdf>
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00214-010-0761-3.pdf>
- Link til min Maple-modellering af reb:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/reb.htm>
- 1. forsøg (lodret cirkel, som roteres og løftes løbende):
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/reb/reb1.pdf>



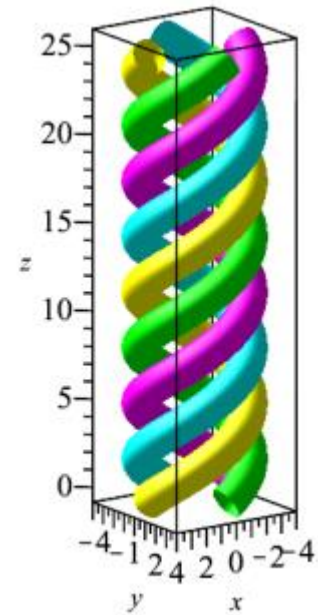
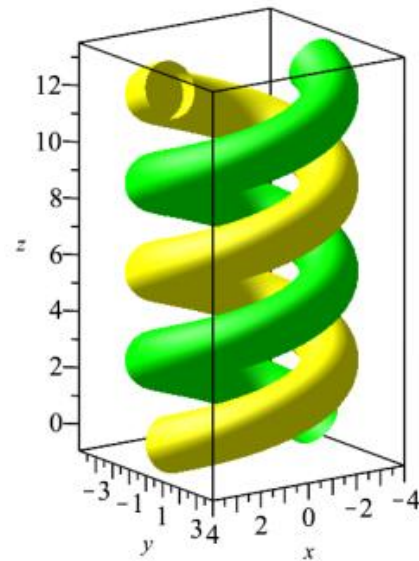
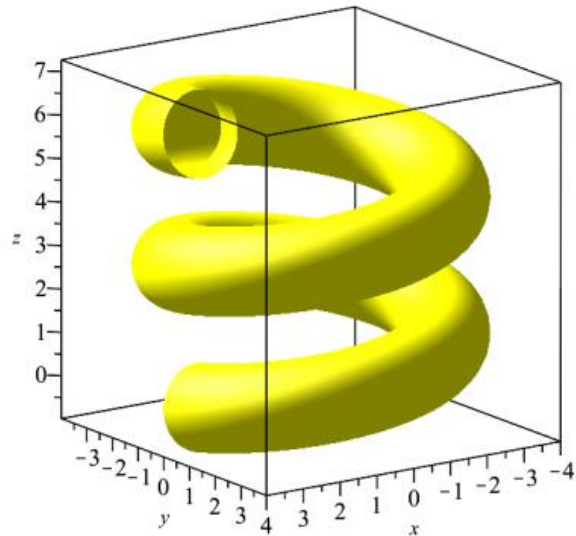
MODELLERING AF REB

- Problem: vandret snit giver ikke cirkler!
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/reb/reb2.pdf>



MODELLERING AF REB

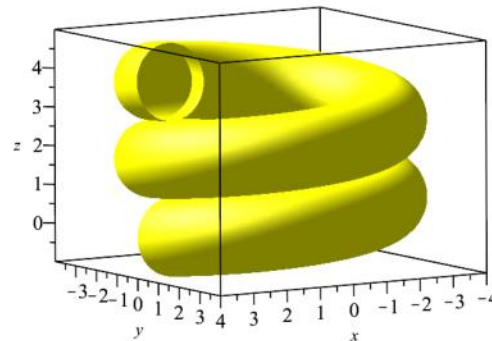
- Udvidelse af helix med en cirkel **vinkelret** på snoningen:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/reb/reb3.pdf>



MODELLERING AF REB

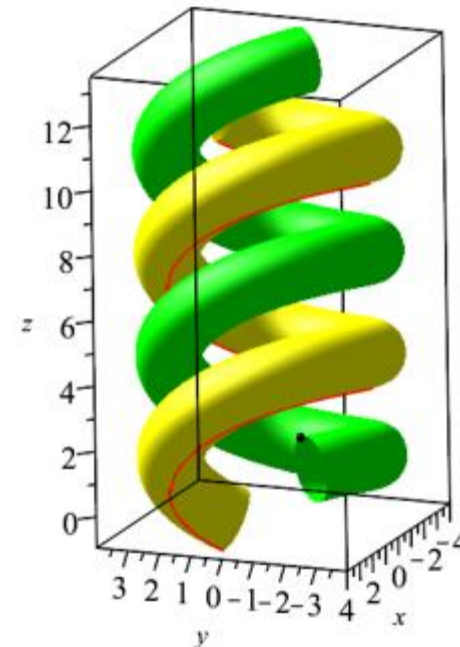
- Nu skal snoningerne ligge **tæt**:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/reb/reb4.pdf>

- Går let med 1 kordel, idet stigningen er lig med diameteren af cirklen.



- Er der flere kordeler, så kan stigningen pr. omgang ikke beregnes analytisk, men alene **numerisk**.

Det sorte punkt skal have 0 afstand til den røde bundlinje!



NUMERISK LØSNING

$$\text{Difference}(u, h) = \begin{bmatrix} 3 \cos(u) - \frac{h \sin(u)}{\sqrt{h^2 + 9}} + 3 \\ 3 \sin(u) + \frac{h \cos(u)}{\sqrt{h^2 + 9}} - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 9}} \\ h u - \frac{6}{\sqrt{h^2 + 9}} \end{bmatrix}$$

$$L := \text{fsolve}(\{ \text{Difference}(u, h)[1] = 0, \text{Difference}(u, h)[3] = 0 \}, \{ h = 0 .. 2, u = 0 .. 2 \cdot \pi \}) = \{ h = 0.6514057475, u = 3.000367376 \}$$

NB: kan ikke løses eksakt, derfor anvendes den numeriske løser på 2 af ligningerne (ikke 3 - for så findes der ikke en løsning).

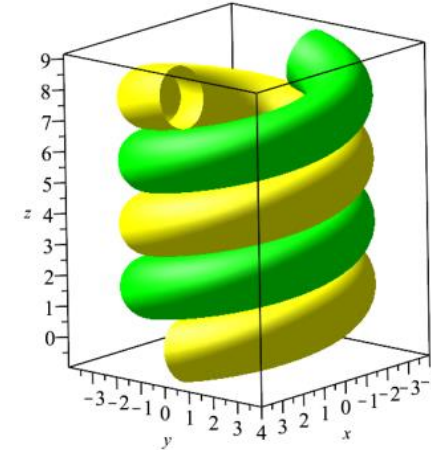
$$U := \text{rhs}(L[2]) : H := \text{rhs}(L[1]) :$$

$$\text{evalf}(\text{Difference}(U, H)) = \begin{bmatrix} 0. \\ -8. \times 10^{-10} \\ 0. \end{bmatrix}$$

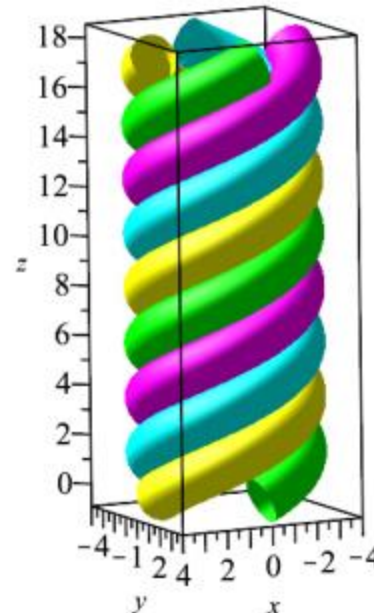
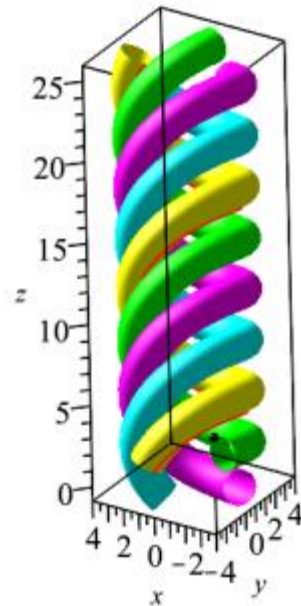
Dvs. med den givne H-værdi vil det sorte punkt ligge på den gule helix.

MODELLERING AF REB

- Når stigningen pr. omgang er beregnet numerisk, så kan der tegnes:

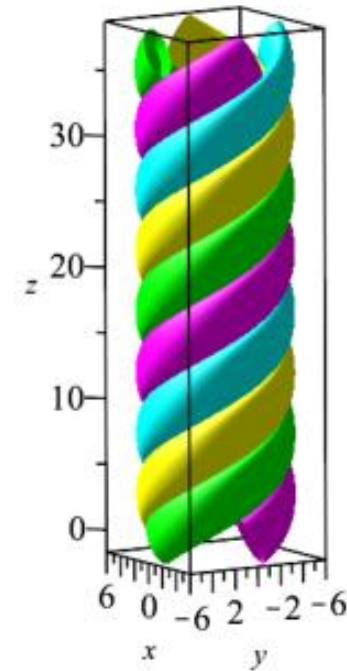
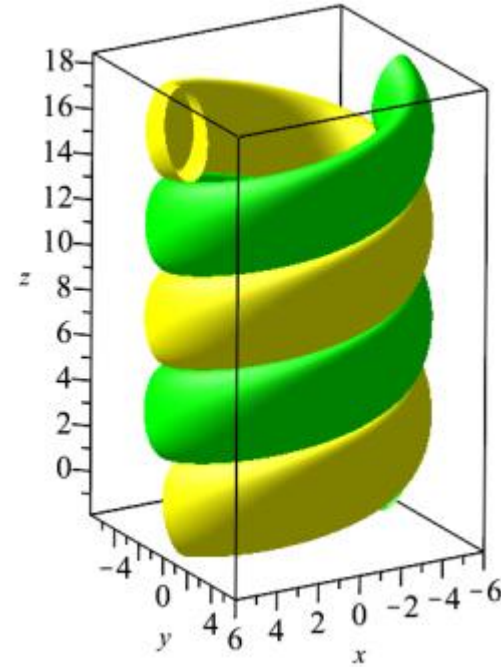
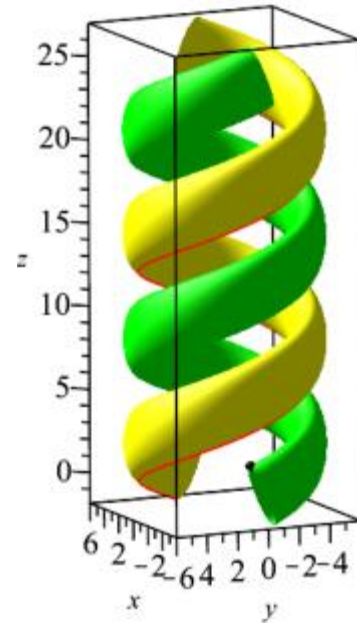
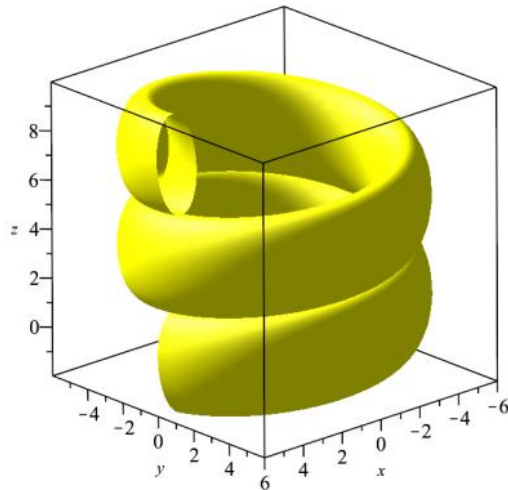


- Med 4 kordeler:



MODELLERING AF REB

- **Ambition:** udvidelsen af helixen er **elliptisk** (frem for cirkulær)!



MODELLERING AF SPIRALER

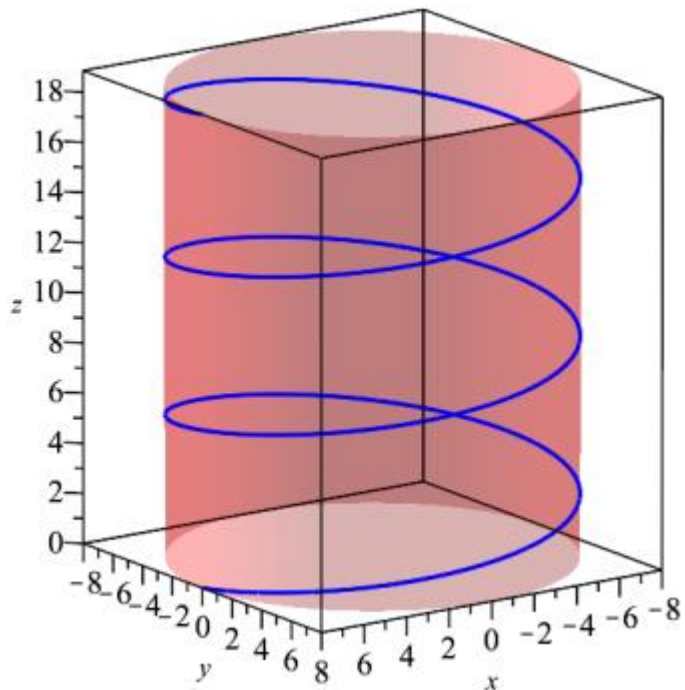
- ”**Spiraler**” er inspireret af denne artikel fundet på internettet:
<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/vm/57/vmn57p2-10.pdf>
- Link til mit Maple-modellering af spiraler:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/spiraler.htm>
- Handler om at udvide **helix**-begrebet, så man tegner **spiraler** på andet end en cylinder!

MODELLERING AF SPIRALER

Cylindrisk helix

$$r_1(t) := R_z(t) \cdot \langle r, 0, c \cdot t \rangle :$$

$$r_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) r \\ \sin(t) r \\ c t \end{bmatrix}$$



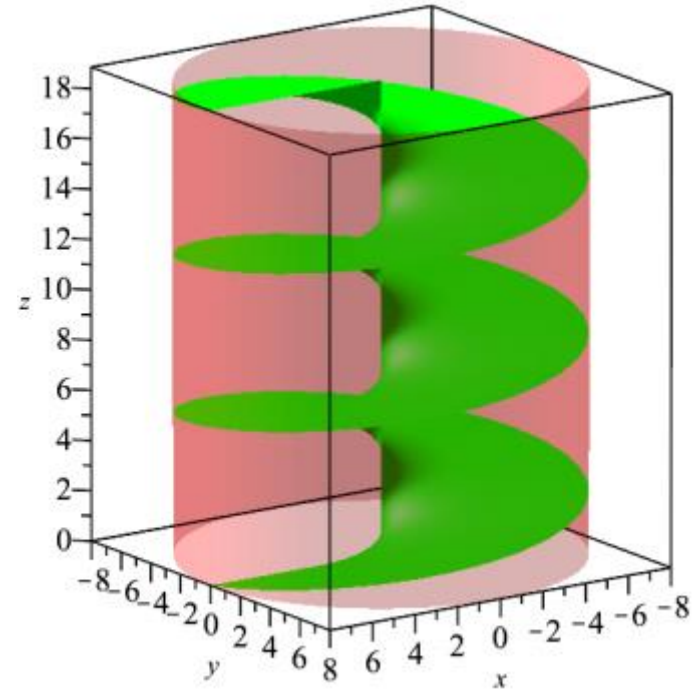
$$r_{cylinder}(u, v) := R_z(v) \cdot \langle r, 0, c \cdot u \rangle :$$

$$r_{cylinder}(u, v) = \begin{bmatrix} \cos(v) r \\ \sin(v) r \\ c u \end{bmatrix}$$

Cylindrisk helicoide

$$r_2(u, v) := R_z(v) \cdot \langle u \cdot r, 0, c \cdot v \rangle :$$

$$r_2(u, v) = \begin{bmatrix} \cos(v) u r \\ \sin(v) u r \\ c v \end{bmatrix}$$

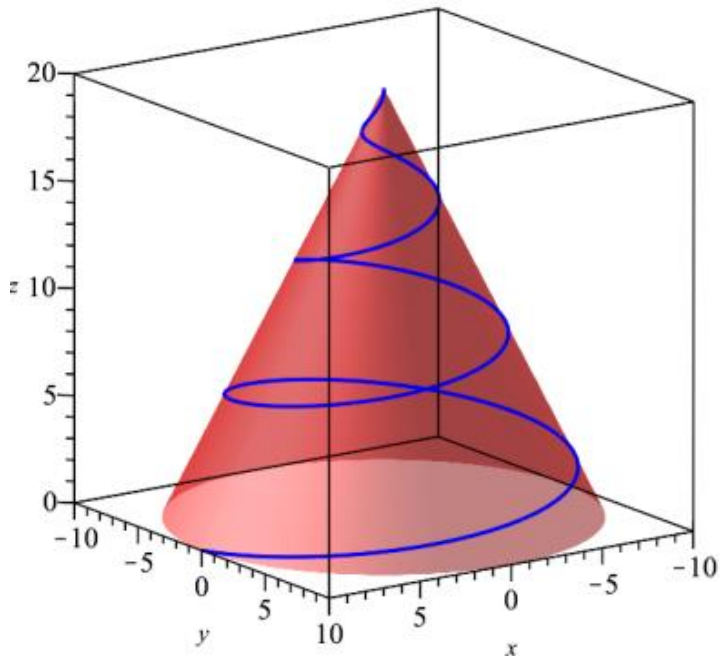


MODELLERING AF SPIRALER

Konisk helix

$$r_3(t) := R_z(t) \cdot \langle (\beta + \alpha \cdot t), 0, c \cdot t \rangle :$$

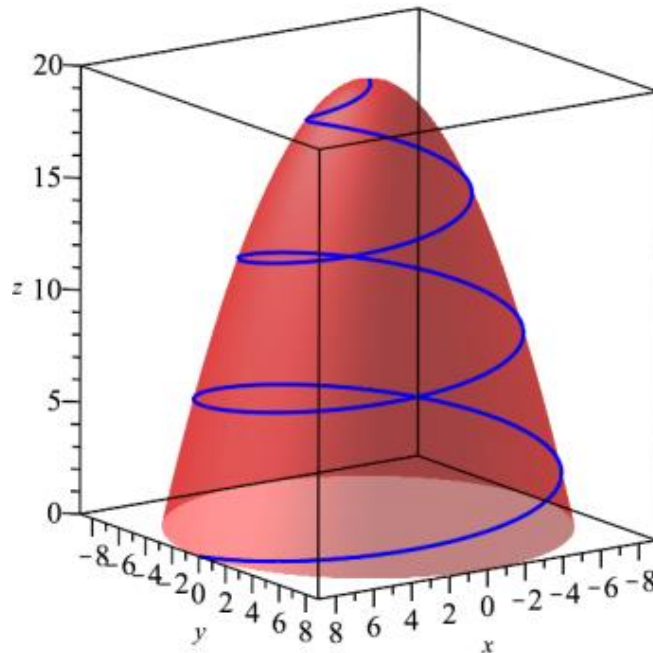
$$r_3(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) (\alpha t + \beta) \\ \sin(t) (\alpha t + \beta) \\ c t \end{bmatrix}$$



Parabolsk helix

$$r_5(t) := R_z(t) \cdot \langle \alpha \cdot \sqrt{\beta - t}, 0, c \cdot t \rangle :$$

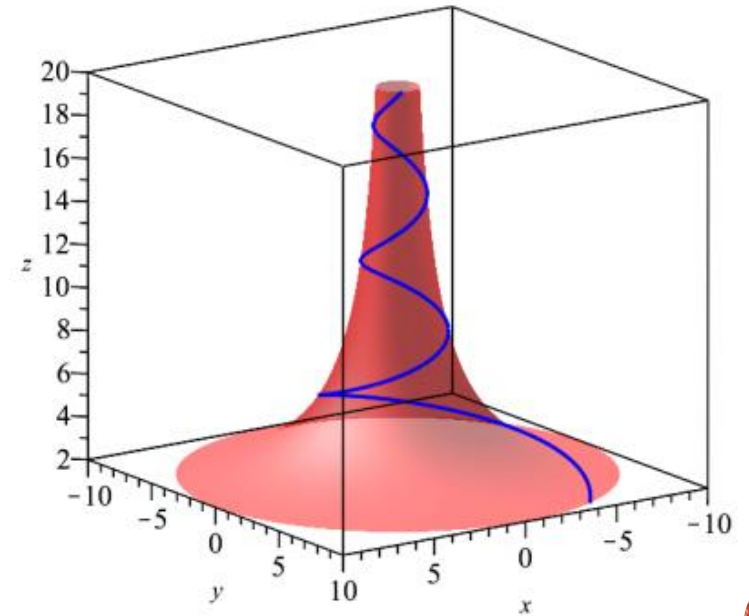
$$r_5(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \alpha \sqrt{\beta - t} \\ \sin(t) \alpha \sqrt{\beta - t} \\ c t \end{bmatrix}$$



Hyperbolsk helix

$$r_7(t) := R_z(t) \cdot \langle \frac{\alpha}{t}, 0, c \cdot t \rangle :$$

$$r_7(t) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(t) \alpha}{t} \\ \frac{\sin(t) \alpha}{t} \\ c t \end{bmatrix}$$

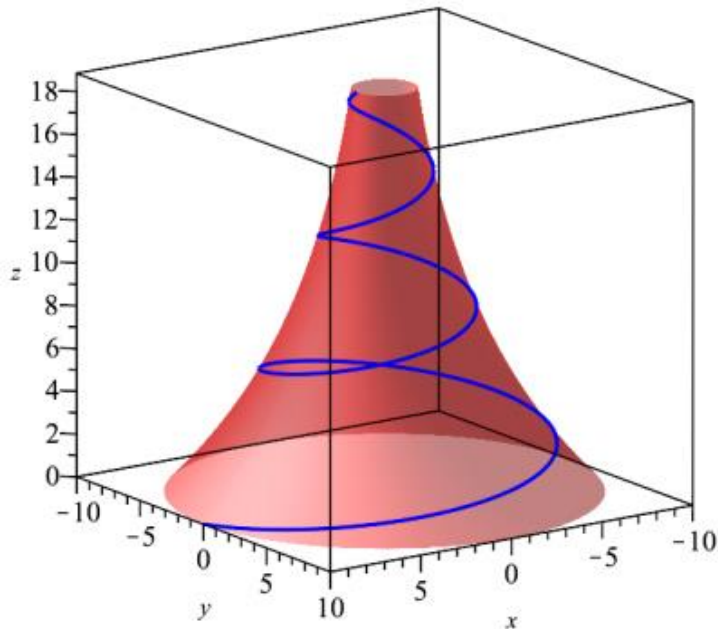


MODELLERING AF SPIRALER

Logaritmisk helix

$$r_9(t) := R_z(t) \cdot \langle \alpha \cdot e^{\beta t}, 0, c \cdot t \rangle :$$

$$r_9(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \alpha e^{\beta t} \\ \sin(t) \alpha e^{\beta t} \\ c t \end{bmatrix}$$



Sfærisk helix

$$r_{11}(t) := R_z\left(\frac{t}{c}\right) \cdot \langle \sqrt{r^2 - t^2}, 0, t \rangle :$$

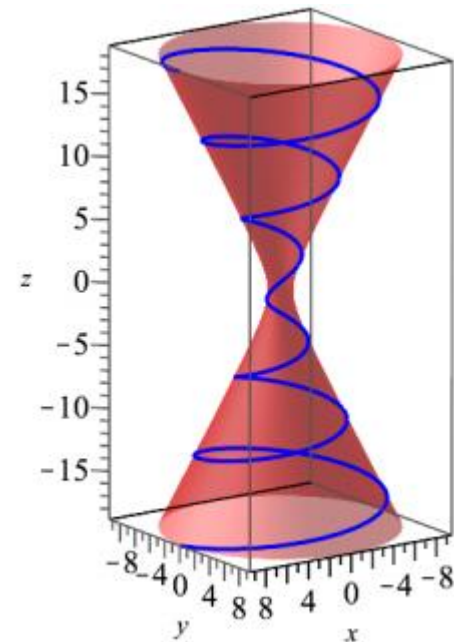
$$r_{11}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{r^2 - t^2} \\ \sin\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{r^2 - t^2} \\ t \end{bmatrix}$$



Hyperbolsk helix

$$r_{13}(t) := R_z\left(\frac{t}{c}\right) \cdot \left\langle p \cdot \sqrt{\frac{t^2}{q^2} + 1}, 0, t \right\rangle :$$

$$r_{13}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{c}\right) p \sqrt{\frac{t^2}{q^2} + 1} \\ \sin\left(\frac{t}{c}\right) p \sqrt{\frac{t^2}{q^2} + 1} \\ t \end{bmatrix}$$

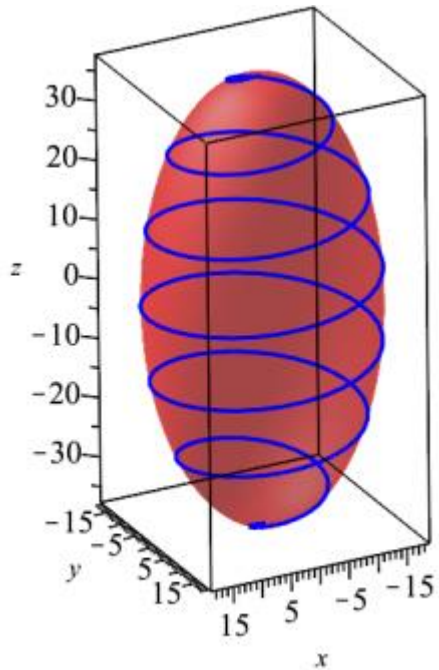


MODELLERING AF SPIRALER

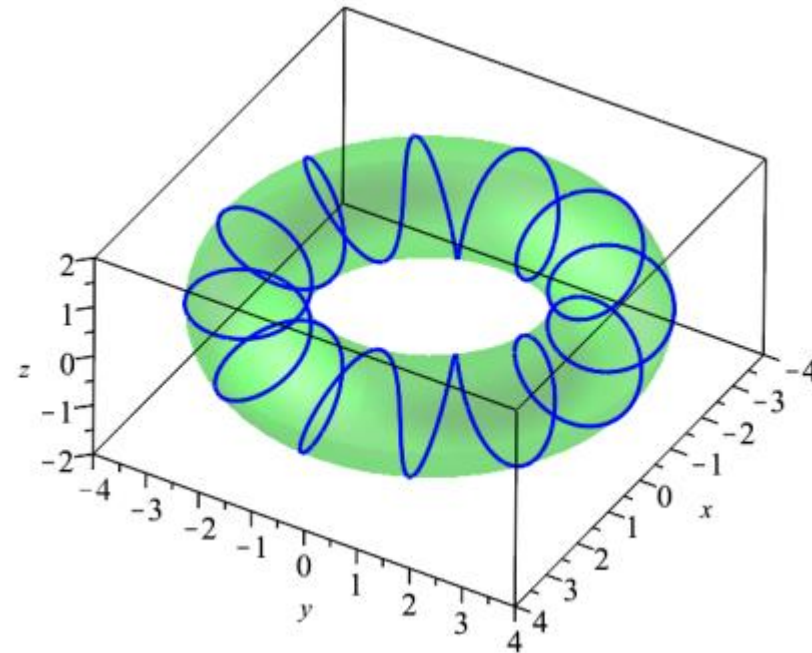
Ellipsoidisk helix

$$r_{17}(t) := R_z\left(\frac{t}{c}\right) \cdot \langle \sqrt{r^2 - t^2}, 0, a \cdot t \rangle :$$

$$r_{17}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{r^2 - t^2} \\ \sin\left(\frac{t}{c}\right) \sqrt{r^2 - t^2} \\ a t \end{bmatrix}$$



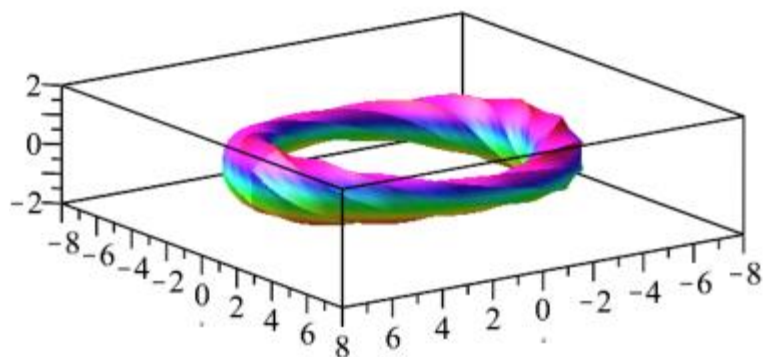
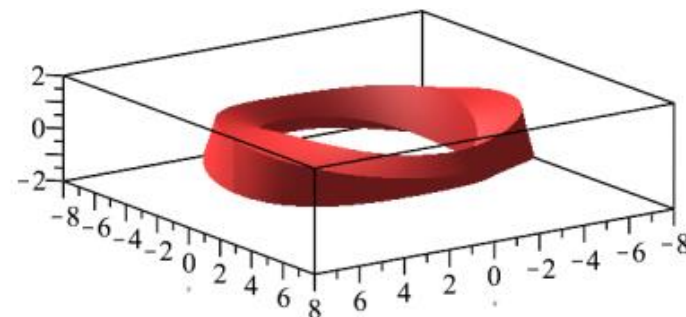
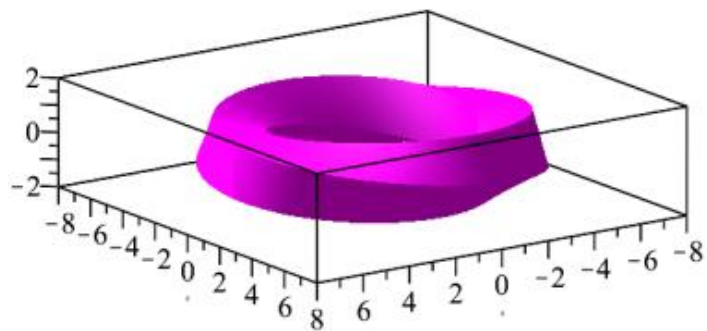
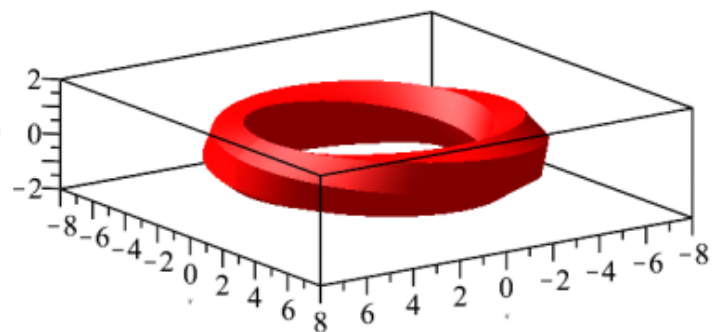
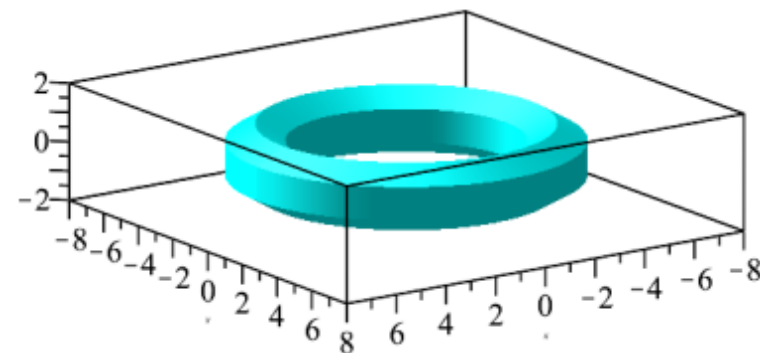
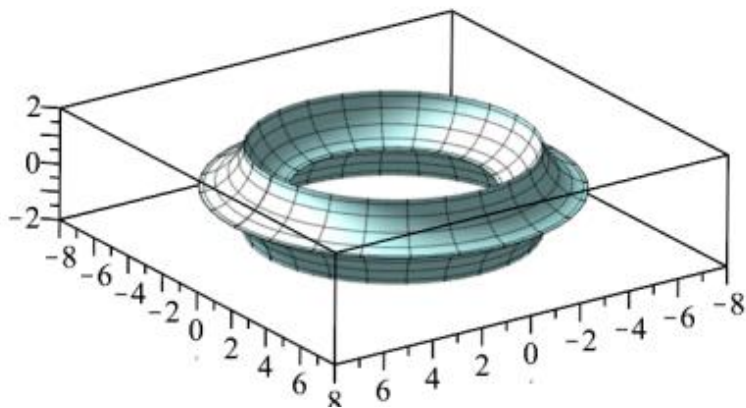
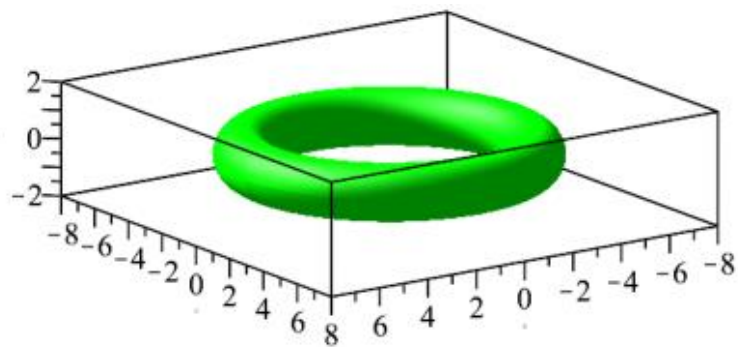
Helix på en torus



MODELLERING AF ARMBÅND

- Se mit website: <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/armbaand.htm>
- Nærmere filen (28 sider): <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/armbaand/armbaand.pdf>
 - Parametrisering af cirkel, ellipse og asteroide
 - Anvendelse af rotationsmatricer om akserne
 - Vridning (tvist) og variation af tykkelsen
- Lagring som STL-fil, så armbåndet kan 3D-printes

MODELLERING AF ARMBÅND



MAPLE-PAKKER

- **Praktiske udvidelser, som jeg anvender på DTU!**
- Man får adgang til funktionerne via kald af: **with(pakkenavn)**
 - NB: **unwith(pakkenavn)** smider pakken ud igen
 - Kan kalde blot én funktion i pakken med: **pakkenavn[funktion]**
- Se på mit website: <https://steen-toft.dk/mat/maple/pakker/>
 - Download samt forklaring på fremstillingen.
- **"Gym"**-pakken af Knud Nissen er inklusiv hjælpefil. Bruges i gymnasiematematik. Den installerer sig via et installations program.
- 3 pakker nedenfor, som skal 'håndinstalleres' af brugeren (MLA-filen skal kopieres til rette sted, nemlig LIB-mappen):
<https://steen-toft.dk/mat/maple/pakker/placer.pdf>

MAPLE-PAKKER

- **"Integrator8"**-pakken af Steen Markvorsen, DTU.
- **"VektorAnalyse4"**-pakken. Lavet af mig efter rutiner fra Karsten Schmidt. Anvendes i Matematik 1 på DTU.
- **"plot2D3D2"**-pakken. Lavet af mig, da jeg savnede visse plot-rutiner i Maple. Passer med pensum i Matematik 1 på DTU.
 - Nedenfor vises anvendelser af pakken "plot2D3D2" (sidste 2-tal er versionsnummeret) for at forbedre forståelsen af matematikken.

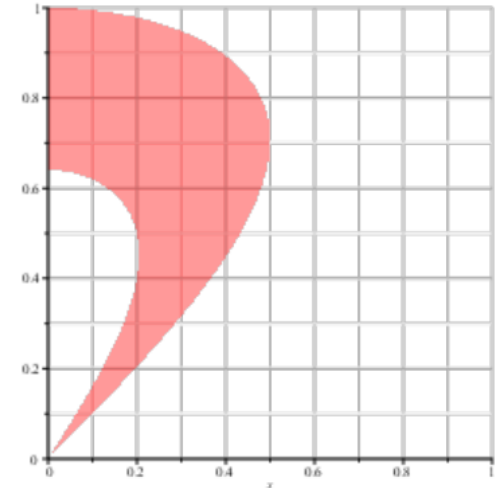
MAPLE-PAKKER

- Plot af 2D-område:

$$R4(u, v) := \langle v^4 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u), v^2 \cdot \cos(u) \rangle :$$

$$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1 \right] :$$

`display(plot2D(R4(u, v), INT), color = red, gridlines, style = surface, transparency = 0.6, view = [0..1, 0..1], labels = [x, y])`



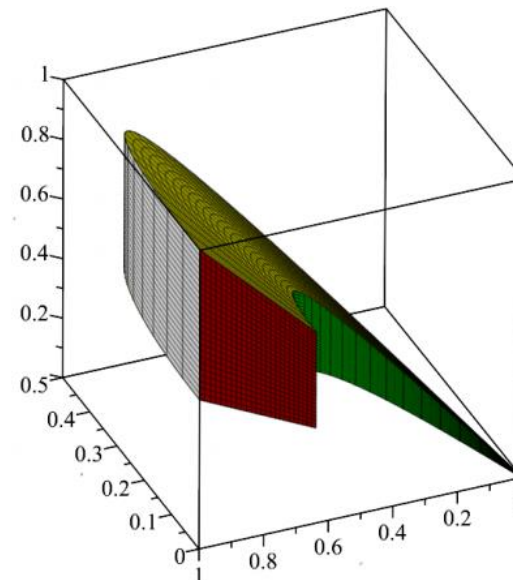
- Plot af 3D-område:

$$R4(u, v, w) := \left\langle v^4 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u), v^2 \cdot \cos(u), \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \cos(u) + \frac{1}{2} \cdot w \cdot v^2 \cdot \cos(u) \right\rangle :$$

$$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1, 0, 1 \right] :$$

`FAR := [red, red, green, gray, yellow, yellow] :`

`display(plot3D(R4(u, v, w), INT, FAR), labels = [x, y, z], axes = boxed)`



MAPLE-PAKKER

Stokes sætning

Et tangentielt kurveintegral af et vektorfelt V langs en lukket kurve = et ortogonalt fladeintegral af vektorfeltet $rot(V)$ over en flade (omkranset af kurven).

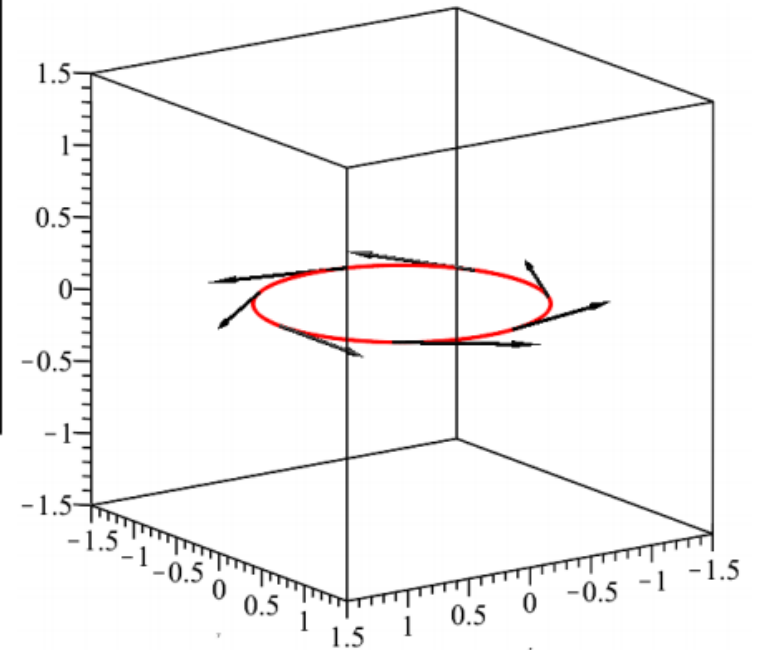
VIGTIGT: de valgte tangentvektorer på kurven skal sammen med normalvektorerne til fladen opfylde højrekonventionen.

NB: Ud fra parametriseringen af kurven dannes *kurvens tangentvektorer*. Ud fra parametriseringen af fladen dannes *fladens normalvektorer*.

De 2 vektorfelter skal opfylde højrekonventionen. Hvis de ikke opfylder højrekonventionen, så vil de 2 beregninger give modsat fortegn - dog samme numeriske værdi.

Når Stokes sætning anvendes, er der 2 muligheder for facit - afhængig af valgt retning, som opfylder højrekonventionen.

Er retningen givet i opgaven, så er der naturligvis kun ét facit.



Plot af kurve og tangentvektorer:

```
C := spacecurve(r(u), u = 0 .. 2·π, color = red, thickness = 3, labels = [x, y, z]) :
```

```
T := TangentVektorer(r(u), [0, 2·π], black, 8) :
```

```
display(C, T, view = [-1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5])
```

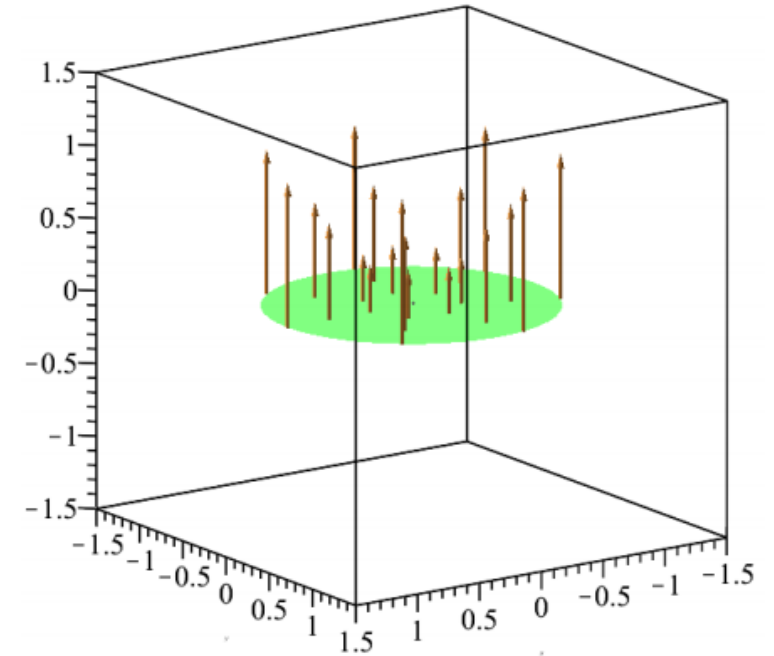
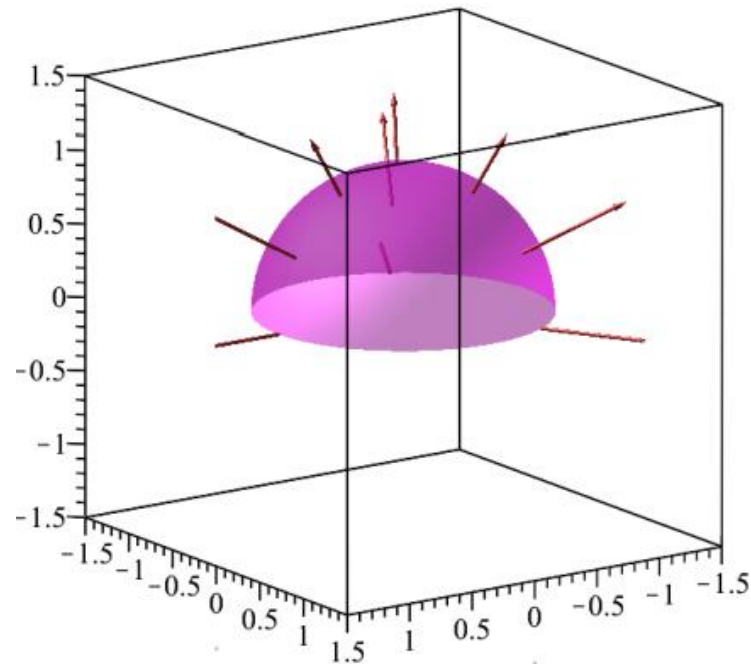
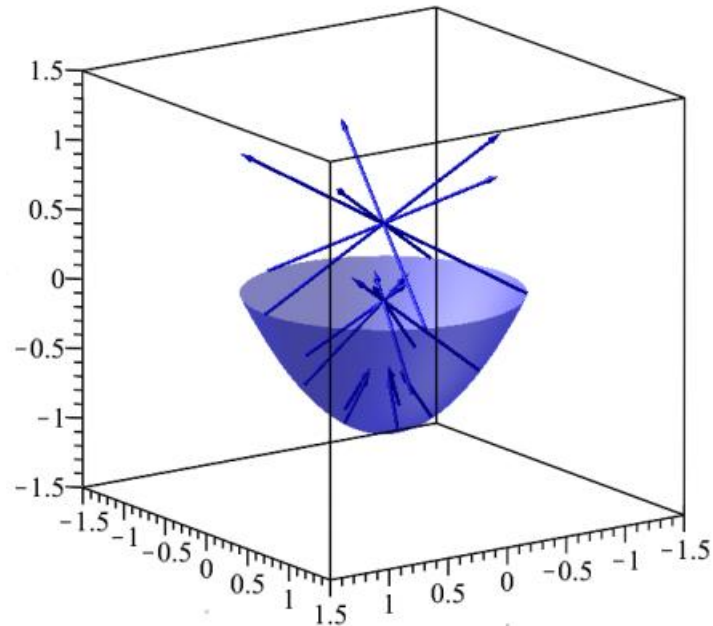
MAPLE-PAKKER

Plot af flade og normalvektorer:

```
 $S := \text{plot3d}(r_C(u, v), u = 0..1, v = 0..2 \cdot \pi, \text{color} = \text{green}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{transparency} = 0.5, \text{labels} = [x, y, z]) :$ 
```

```
 $N_C := \text{NormalVektorer}(r_C(u, v), [0, 1, 0, 2 \cdot \pi], \text{gold}, 4, 8) :$ 
```

```
 $\text{display}(S, N_C, \text{view} = [-1.5..1.5, -1.5..1.5, -1.5..1.5])$ 
```

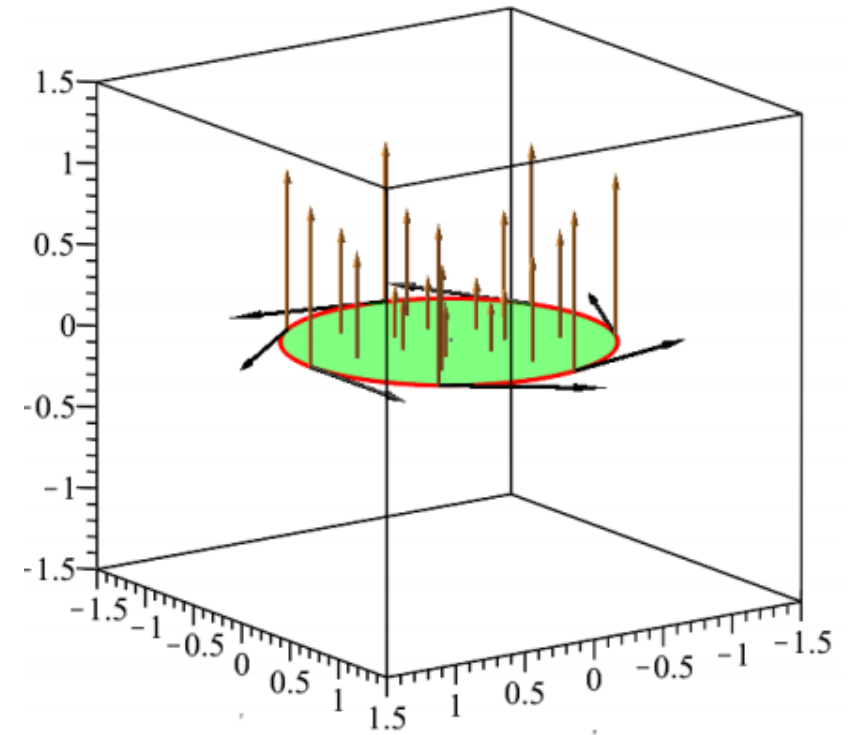
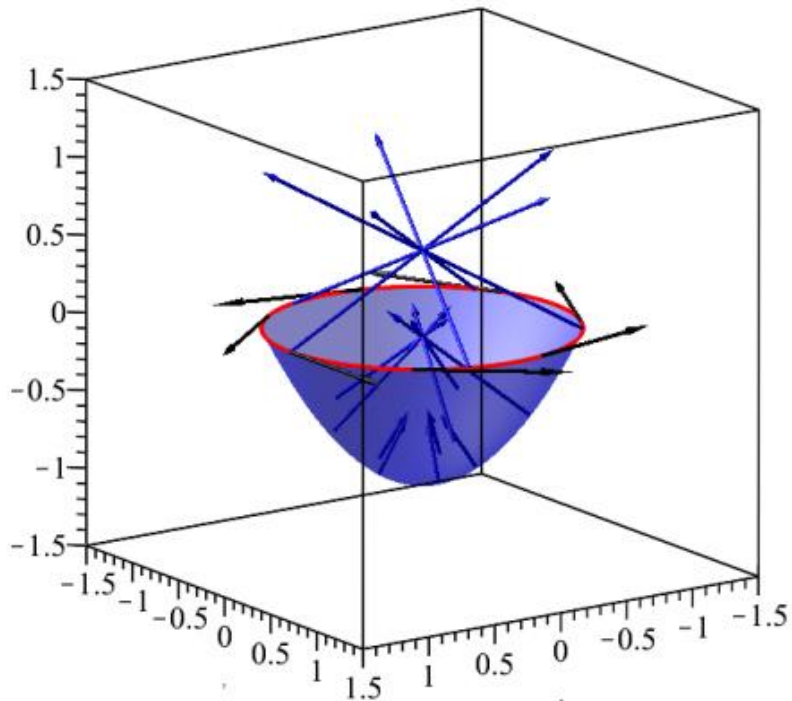


MAPLE-PAKKER

- Er højrekonventionen i Stokes sætning opfyldt?

Cirkelskive som flade

`display(C, T, S, N_C, view = [-1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5])`



MAPLE-PAKKER

- Kan bruges til at tjekke om en parametrisering er korrekt!
<https://steen-toft.dk/mat/dtu/20202021/noter/farlig.pdf>

Parametrisering 1 af øvre halvkugleskal (OK)

$$r_1(u, v) := \langle R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u) \rangle :$$

$$r_1(u, v) = \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor } u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ og } v \in [0; 2 \cdot \pi]$$

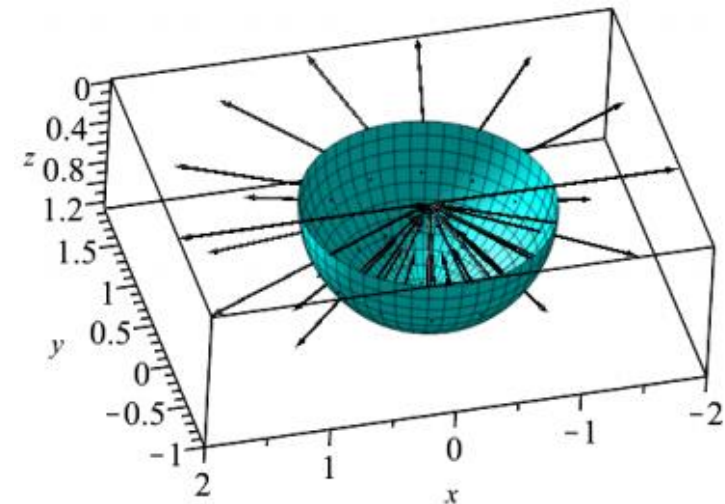
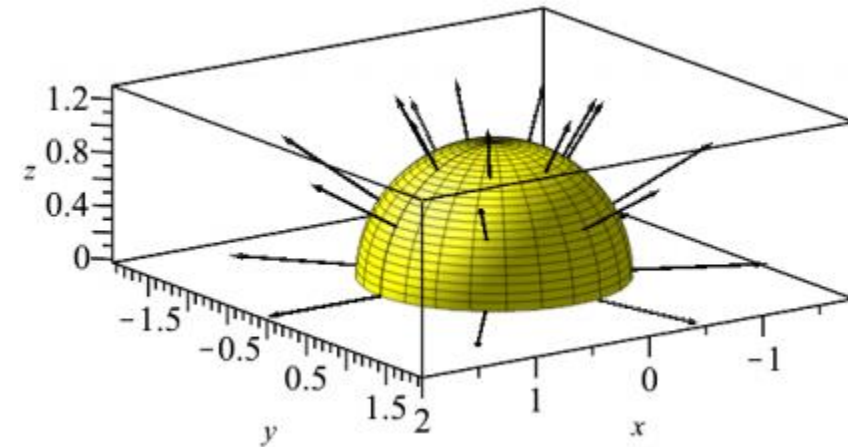
Parametrisering 2 af øvre halvkugleskal (pas på!)

$$r_2(u, v) := \langle R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u) \rangle :$$

$$r_2(u, v) = \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor } u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ og } v \in [0; \pi]$$

NB: samme parametrisering som ovenfor, blot med andre parameterområder!



MAPLE-DAG DTU 2021-09-15

- **Håber at du er blevet inspireret til modellering i Maple.**
- **Tak for i dag.**